



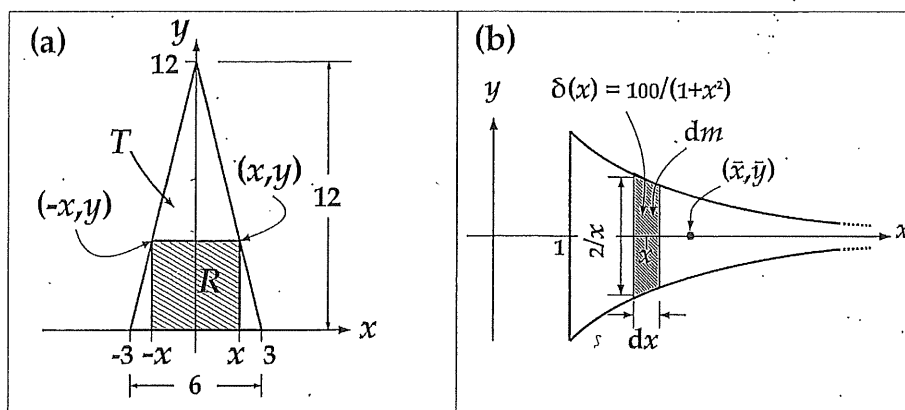
Tentamen 2011-01-14 kl. 14:00–19:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p. exkl. bonuspoäng.) Till tentamensskrivningspoängen adderas erhållna bonuspoäng. (Max: +3p.)

1. a) Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε - δ -formalism) att $\lim_{x \rightarrow -1} (2 - 3x) = 5$. (1.5p)
- b) Avgör huruvida $x = 2$ är en hävbar diskontinuitet eller ej till funktionen $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2}$ samt definiera $f(2)$ för att få kontinuitet. (1.5p)
2. En liksidig triangel T har basen 6 cm och höjden 12 cm. Bestäm den största möjliga arean A hos en rektangel R som ligger inuti triangeln och som har ena sidan på triangelns bas. (Se Figur 1(a).) (3p)
3. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x) = x^{2/3}$ kring $x = 8$ och approximera med hjälp av detta $10^{2/3}$ samt uppskatta absolutbeloppet $|E_2(10)|$ av felet för approximationen. (3p)
4. a) Beräkna $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$. (1p)
- b) Beräkna $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$. (1p)
- c) Beräkna $\int \frac{x-3}{x^3+x^2} dx$. (1p)
5. Bestäm masscentrum $(\bar{x}, \bar{y})$ hos det oändligt långa pappersark vars vänstra ände ligger i $x = 1$ m, är symmetrisk kring x -axeln, har bredden $\frac{2}{x}$ m samt masstätheten $\delta(x) = \frac{100}{1+x^2}$ g/m². (Se Figur 1(b).) (3p)
(Ledtråd: Notera partialbråksuppdelningen $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.)



Figur 1. (a) Rektangeln i triangeln i Uppgift 2. (b) Pappersarket i Uppgift 5.

6. a) Är den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!}$ konvergent eller divergent?
(Ledtråd: Om m jämnt så gäller $m!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-2) \cdot m$.) (1.5p)
- b) Är den alternerande serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 2\sqrt{n}}$ absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent? (1.5p)
7. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2}, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$ (1.5p)
- b) Lös differentialekvationen $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$. (1.5p)

8. Använd den förbättrade Eulers stegmetod för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xe^{x^2-y}, & (*) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

på $[0, 1]$ med steglängden $h = 0.25$ samt bestäm det exakta felet

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

för varje steg $n = 0, 1, 2, 3, 4$. (Ledtråd: ODE:n (*) är separabel.) (3p)

①

LÖSNINGAR TILL TENTAN 2011-01-14

1. a) Visa $\lim_{x \rightarrow -1} (2-3x) = 5$ formellt.

Lösning: Låt $f(x) = 2-3x$, $a = -1$, $L = 5$. Vill visa:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s.a.

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \quad (*)$$

Det gäller att om $\varepsilon > 0$ är givet så:

$$\begin{aligned} |f(x)-L| &= |(2-3x)-5| = |-3-3x| = \\ &= |3+3x| = 3|x+1| = 3|x-(-1)| \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Detta är } < \varepsilon \text{ om} \quad 3|x-(-1)| < \varepsilon \\ |x-(-1)| < \varepsilon/3 \end{aligned}$$

Välj $\delta = \varepsilon/3$. Då gäller:

$$0 < |x-a| < \delta \underset{\delta = \varepsilon/3}{\Rightarrow} 0 < |x-(-1)| < \varepsilon/3 \underset{(**)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} |f(x)-L| < \varepsilon$$

Vilket precis är implikationen (*).

b) Låt $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x-2}$. Är $x=2$ en hävbar diskontinuitet?

Lösning: Notera att det för täljaren gäller
vid insättning av $x=2$:

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 + 0 = 0, \quad (2)$$

d.v.s. kan faktorisera ut $x-2$ ur täljaren:

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ \hline -x^2(x-2) \\ \hline x - 2 \\ -1 \cdot (x-2) \\ \hline 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{Jämnt ut!}$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)(x^2+1)}{x-2} = x^2 + 1$$

$$\text{Vi har: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

d.v.s. gränsvärdet finns

$$\Rightarrow \underline{\underline{x=2 \text{ är en härbar diskontinuitet!}}}$$

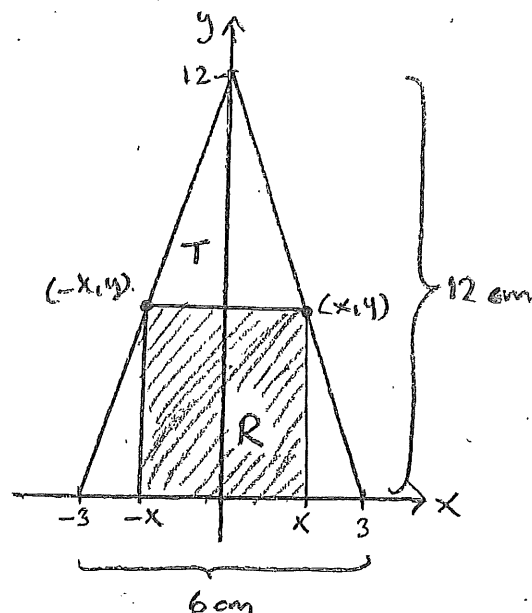
Eftersom $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ så ska vi

$$\underline{\underline{\text{definiera } f(2) = 5.}}$$

2. Liksidig triangel T bas 6 cm höjd 12 cm.
Rektangel R i T ena sidan på T 's bas.
 Största möjliga area A hos R ?

Lösning: Skissa en figur:

③



Arean hos R:

$$A = (R:s \text{ bas}) \cdot (R:s \text{ höjd}) = (2x)y = 2xy$$

Vad är y uttryckt i x ? Rät linje: $y = kx + m$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 12}{3 - 0} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\Rightarrow y = -4x + m = m - 4x$$

Vet att t.ex. $(3, 0)$ ligger på linjen:

$$0 = m - 4 \cdot 3 \Leftrightarrow 0 = m - 12 \Leftrightarrow m = 12$$

$$\Rightarrow y = 12 - 4x = 4(3 - x) \quad (=y(x))$$

$$\Rightarrow A(x) = 2xy(x) = 2x \cdot 4(3 - x) = 8x(3 - x), \quad x \in [0, 3]$$

Vill hitta största värdet till $A(x)$ på $[0, 3]$.

• Kritiska punkter: $A'(x) = 8(3 - x) + 8x(-1) =$

$$= 8(3-x) + 8(-x) = 8(3-2x) \quad (4)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 8(3-2x) = 0 \Leftrightarrow 3-2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2 \quad (\in [0, 3])$$

• Singulära punkter: Saknas!

• Ändpunkter: $x = 0$ och $x = 3$

Det är bland dessa punkter som största (och minsta) värden antas:

$$\begin{cases} A(0) = 8 \cdot 0 \cdot (3-0) = 0 \\ A(3/2) = 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot (3 - \frac{3}{2}) = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 > 0 \\ A(3) = 8 \cdot 3 \cdot (3-3) = 8 \cdot 3 \cdot 0 = 0 < 18 \end{cases}$$

Största värdet är alltså 18.

$\Rightarrow$ R:s största area är 18 cm^2 .

3. $f(x) = x^{2/3}$, bestämma $P_2(x)$ i $x=8$,
approximera $10^{2/3}$ samt uppskatta $|E_2(10)|$.

Lösning: Taylorpolynom av andra ordningen i $x=8$:

$$P_2(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{1}{2!} f''(8)(x-8)^2$$

Felet blir enligt Taylors sats:

$$E_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(s)(x-8)^3, \quad s \in (8, x) \quad (x > 8)$$

Vi får för $f(x) = x^{2/3}$:

⑤

$$f(8) = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\Rightarrow f'(8) = \frac{2}{3}8^{-1/3} = \frac{2}{3}(8^{1/3})^{-1} = \frac{2}{3}2^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-1/3-1} = -\frac{2}{9}x^{-4/3}$$

$$\Rightarrow f''(8) = -\frac{2}{9}8^{-4/3} = -\frac{2}{9}(8^{1/3})^{-4} =$$

$$= -\frac{2}{9}2^{-4} = -\frac{2}{9}\frac{1}{16} = -\frac{1}{72}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-4/3-1} = \frac{8}{27}x^{-7/3}$$

Vi får därför:

$$P_2(x) = 4 + \frac{1}{3}(x-8) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{72}\right)(x-8)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 4 + \frac{1}{3}(x-8) - \frac{1}{144}(x-8)^2}$$

$$\Rightarrow 10^{2/3} = f(10) \approx P_2(10) =$$

$$= 4 + \frac{1}{3}(10-8) - \frac{1}{144}(10-8)^2 =$$

$$= 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{144} \cdot 2^2 = 4 + \frac{2}{3} - \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{144 + 24 - 1}{36} = \frac{167}{36} = 4.638\bar{8}$$

d.v.s. vi har approximationen $10^{2/3} \approx 4.638\bar{8}$

Felet:

$$E_2(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{27} 5^{-7/3} \cdot (x-8)^3 =$$

$$= \frac{4}{81} 5^{-7/3} (x-8)^3, \quad \text{se}(8, x)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |E_2(10)| &= \left| \frac{1}{6} 5^{-7/3} (10-8)^3 \right| = \\
 &= \frac{1}{6} 2^3 5^{-7/3} = \frac{4}{3} 5^{-7/3} < \\
 &< [5 > 8 \Rightarrow 5^{-7/3} < 8^{-7/3}] \frac{4}{3} 8^{-7/3} = \\
 &= \frac{4}{3} (8^{1/3})^{-7} = \frac{4}{3} 2^{-7} = \frac{4}{3} \frac{1}{128} = \\
 &= \frac{1}{96} = 0.01041\bar{6}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

d.v.s. $|E_2(10)| < 0.01041\bar{6}$

Notera: M.h.g. miniräknare: $10^{2/3} = 4.6415888...$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |E_2(10)| &= |10^{2/3} - P_2(10)| = \\
 &= |4.6415888... - 4.6388888...| = \\
 &= 0.0026999... < 0.0104166..., \\
 &\text{så det vi härlett tycks stämma.} \quad \square
 \end{aligned}$$

4. a) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\begin{matrix} u=x+1 \\ du=dx \end{matrix} \begin{matrix} x=1 \Rightarrow u=2 \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{matrix} \right] =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{\sqrt{u}} du = \int_1^2 \frac{u^2 - 2u + 1}{\sqrt{u}} du = \\
 &= \int_1^2 (u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-1/2}) du = \\
 &= \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} + 2u^{1/2} \right) \Big|_1^2 = \\
 &= \left(\frac{2}{5} 2^{5/2} - \frac{4}{3} 2^{3/2} + 2 \cdot 2^{1/2} \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 \right) =
 \end{aligned}$$

⑦

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{5} \cdot 2^2 \cdot 2^{1/2} - \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot 2^{1/2} + 2 \cdot 2^{1/2} - \frac{6-20+30}{15} = \\
&= \frac{2}{5} \cdot 4\sqrt{2} - \frac{4}{3} 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \\
&= \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{3} + 1\right) 2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \frac{12-20+15}{15} 2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \\
&= \frac{7}{15} 2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \boxed{\frac{2}{15}(7\sqrt{2}-8)} (=0.2532659...)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \int_0^1 \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\downarrow} \underbrace{dx}_{\uparrow} &= \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} U = \ln(1+x^2) \\ dU = \frac{2x}{1+x^2} dx \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} dv = dx \\ V = x \end{array} \right. \end{array} \right] = \\
&= \ln(1+x^2) \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{1+x^2} dx = \\
&= x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\
&= x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\
&= x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 1 dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2x \Big|_0^1 + 2 \arctan x \Big|_0^1 = \\
&= (x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x) \Big|_0^1 = \\
&= (1 \cdot \ln(1+1^2) - 2 \cdot 1 + 2 \arctan 1) - \\
&\quad - (0 \cdot \ln(1+0^2) - 2 \cdot 0 + 2 \arctan 0) = \\
&= (\ln 2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4}) - 0 = \boxed{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} \\
& (= 0.2639435...)
\end{aligned}$$

$$c) \int \frac{x-3}{x^3+x^2} dx = \int \frac{x-3}{x^2(x+1)} dx = (*)$$

⑧

Ansätt integrand som partialbråk:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x^2(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \\ &= \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} = \\ &= \frac{Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2}{x^2(x+1)} = \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A-3=1 \\ B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+C=0 \\ A=4 \\ B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=-4 \\ A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) = \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{-4}{x+1} \right) dx =$$

$$= 4 \ln|x| - 3(-1) \frac{1}{x} - 4 \ln|x+1| + C =$$

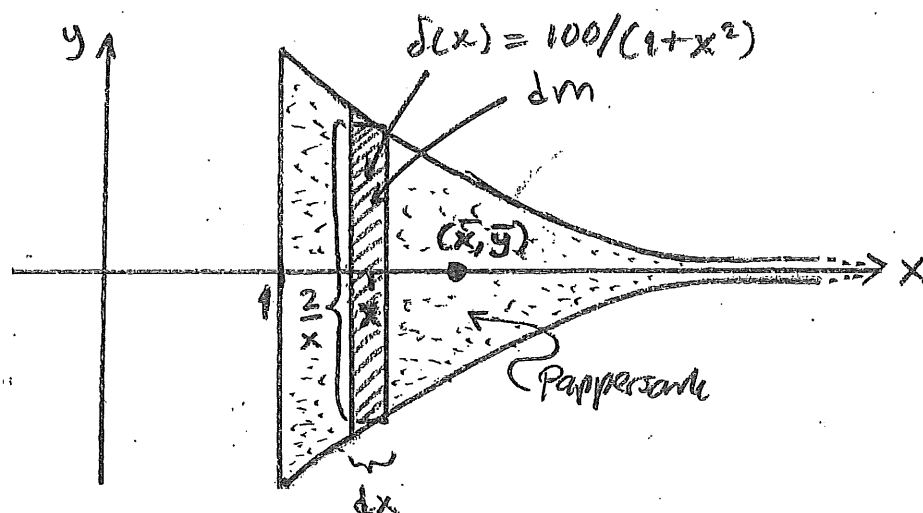
$$= 4(\ln|x| - \ln|x+1|) + \frac{3}{x} + C =$$

$$= \boxed{4 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{3}{x} + C}$$

5.

Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y})$ hos ∞ lång platta med vänstra ändan i $x=1$, symmetrisk kring x -axeln, bredden $2/x$ och $\delta(x) = 1/(1+x^2)$.

⑨ Se figur:



P.g.a. symmetri gäller förstås $\bar{y} = 0$ m.

För $\bar{x}$ gäller: $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$. ($m = \text{massan}$,
 $M_{x=0} = \text{moment kring } x=0$)

• Massan: $m = \int dm$ där masselamantet ges enligt

$dm = \text{masstäthet} \times \text{ytelamantets area} =$

$$= \delta(x) \times (\text{bredden} \times dx) =$$

$$= \frac{100}{1+x^2} \cdot \frac{2}{x} \cdot dx$$

$$\Rightarrow m = \int_1^{\infty} \frac{100}{1+x^2} \cdot \frac{2}{x} dx = 200 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= [\text{Ledtråden: } \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}] =$$

$$= 200 \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = [\text{Per def.}] =$$

$$= 200 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= 200 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right) \Big|_1^R =$$

$$\begin{aligned}
&= 200 \lim_{R \rightarrow \infty} \left((\ln R - \frac{1}{2} \ln(1+R^2)) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right) = \\
&= 200 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \\
&= 200 \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{\sqrt{1/R^2 + 1}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \\
&= 200 \left(\ln \frac{1}{\sqrt{0+1}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \\
&= 200 \left(\ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = 100 \ln 2
\end{aligned}$$

• Moment: $M_{x=0} = \int x \, dm = [\text{Enligt ovan}] =$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{\infty} x \frac{100}{1+x^2} \frac{2}{x} \, dx = 200 \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= 200 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= 200 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\arctan x \Big|_1^R \right) = \\
&= 200 \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \arctan R - \arctan 1 \right) = \\
&= 200 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 200 \frac{\pi}{4} = 50\pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{50\pi}{100 \ln 2} = \frac{\pi}{2 \ln 2}$$

Masscentrum ligger i $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2 \ln 2} m, 0 m \right)$.

(Notera: $\bar{x} = 2.2661800\dots$)

① 6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!}$ konvergent?

Lösning: $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(2n)!!}{(2n)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!} \text{ testar vi med}$$

hjälp av kvotkriteriet (ty positiv serie):

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2(n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ Serien konvergerar

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$ absolutkonv., betingat konv. eller divergent?

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$

• Absolutkonvergent? $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $|a_n| = \frac{1}{n+2\sqrt{n}}$

Vi ser att $|a_n| \approx \frac{1}{n}$ då n stort

$\Rightarrow$ Jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = 1/n$.

Vi får gränsvärdet

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2/\sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{1+0} = 1 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eftersom den harmoniska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergerar mot } \infty$$

och $L > 0$ så gäller enligt Jämförelsekriterium #2 att även $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerar

$\Rightarrow$ Serien är ej absolutkonvergent.

• Betingat konvergent! Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}}$, uppfyller:

(i) Serien är alternerande. ($a_n a_{n+1} < 0$)

(ii) Serien har avtagande belopp ty

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)+2\sqrt{n+1}}{n+2\sqrt{n}} > 1 \Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n|$$

(iii) Seriens termer går mot noll ($a_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sqrt{n}} \rightarrow 0$)

Enligt kriteriet för alternerande serier gäller därför att serien är konvergent.

$\Rightarrow$ Serien är betingat konvergent.

⑬ 7. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

Lösning: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ löser vi

med hjälp av integrerande faktorer. Vi har:

$$\mu = \int 2x \, dx = x^2 \Rightarrow \text{I.F.} = e^\mu = e^{x^2}$$

$$\Rightarrow e^{x^2}(y' + 2xy) = e^{x^2} \cdot xe^{-x^2}$$

$$e^{x^2}y' + e^{x^2} \cdot 2x \cdot y = x$$

$$e^{x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(e^{x^2})y = x$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = x$$

$$e^{x^2}y = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (*)$$

$$\text{Men } y(0) = 1/2 \Rightarrow e^{0^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}0^2 + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 + C \Leftrightarrow C = 1/2$$

$$\Rightarrow (*) \text{ blir } e^{x^2}y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2})$$

d.v.s. $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}(1+x^2)}$

b) Lös $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} \quad (**)$

Lösning: • Homogen version av (**): $y'' + 6y' + 8y = 0$

Detta ger karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 6r + 8 = 0 \Leftrightarrow r = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases} \quad (19)$$

$\Rightarrow$ Den komplementära lösningen är

$$y_h(x) = Ce^{-2x} + De^{-4x}$$

- Partikulärlösning till (**) : $HL_{(*)} = 3e^{-2x} = P_n(x)e^{-3x}$
där $P_n(x) = 3$, d.v.s. $n=0$ (0:e-grads-polynom).

Pröva med (där $A_n(x)$ ansatt n :te-grads-polynom, $n=0$):

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^m A_n(x) e^{-2x} = [n=0] = \\ &= x^m A e^{-2x} = Ax^m e^{-2x} \end{aligned}$$

$m=0$ $\Rightarrow y_p(x) = Ae^{-2x}$, löser den
homogena ODE:n (d.v.s. Ae^{-2x}
ingår redan i y_h)

$m=1$ $\Rightarrow y_p(x) = Axe^{-2x}$, löser inte
den homogena ODE:n

Vi väljer alltså $y_p(x) = Axe^{-2x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p'(x) &= A(1 \cdot e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}) = \\ &= A(1-2x)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p''(x) &= A((-2)e^{-2x} + (1-2x)(-2)e^{-2x}) = \\ &= A(4x-4)e^{-2x} = 4A(x-1)e^{-2x} \end{aligned}$$

Sätt in y_p , y_p' och y_p'' i (*):

⑮

$$4A(x-1)e^{-2x} + 6 \cdot A(1-2x)e^{-2x} + 8 \cdot Ax e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

⇕

$$A(4x-4) + 6(1-2x) + 8x = 3$$

⇕

$$A(4x-4+6-12x+8x) = 3$$

⇕

$$2A = 3$$

⇕

$$A = 3/2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{3}{2} x e^{-2x}$$

Den allmänna lösningen är $y = y_p + y_h$:

$$y(x) = C e^{-2x} + D e^{-4x} + \frac{3}{2} x e^{-2x}$$

d.v.s.

$$y(x) = (C + \frac{3}{2}x) e^{-2x} + D e^{-4x}$$

8.

Förbättrade Eulers stegmetod för att lösa

begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x e^{x^2-y} & (*) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

på $[0,1]$ med $h=0.25$. Bestäm exakt

fel $e_n = y(x_n) - y_n$, $n=0,1,2,3,4$.

Lösning:

Begynnelsevärdesproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ med}$$

steglängd h ger med den förbättrade Eulers stegmetod följande iterationsformler:

$$x_n = x_0 + nh$$

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}$$

Här har vi: $f(x, y) = xe^{x^2 - y}$, $x_0 = 0, y_0 = 0, h = 0.25$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = 0 + n \cdot 0.25 = 0.25 \cdot n \\ u_{n+1} = y_n + 0.25 \cdot x_n e^{x_n^2 - y_n} \\ y_{n+1} = y_n + 0.125 \cdot (x_n e^{x_n^2 - y_n} + x_{n+1} e^{x_{n+1}^2 - u_{n+1}}) \end{cases}$$

Detta ger iterationerna

$$n=1 \begin{cases} x_1 = 0.25 \cdot 1 = \underline{0.25} \\ u_1 = y_0 + 0.25 \cdot x_0 e^{x_0^2 - y_0} = 0 + 0.25 \cdot 0 \cdot e^{0^2 - 0} = 0 \\ y_1 = y_0 + 0.125(x_0 e^{x_0^2 - y_0} + x_1 e^{x_1^2 - u_1}) = \\ = 0 + 0.125(0 e^{0^2 - 0} + 0.25 e^{0.25^2 - 0}) = \\ = 0.03125 \cdot e^{0.25^2} = \underline{0.0332654...} \end{cases}$$

$$n=2 \begin{cases} x_2 = 0.25 \cdot 2 = \underline{0.5} \\ u_2 = y_1 + 0.25 \cdot x_1 e^{x_1^2 - y_1} = \\ = 0.0332654... + 0.25 \cdot 0.25 e^{0.25^2 - 0.0332654...} = \\ = 0.0976195... \\ y_2 = y_1 + 0.125(x_1 e^{x_1^2 - y_1} + x_2 e^{x_2^2 - u_2}) = \\ = 0.0332654... + 0.125(0.25 e^{0.25^2 - 0.0332654...} + \\ + 0.5 e^{0.5^2 - 0.0976195...}) = \\ = \underline{0.1382302...} \end{cases}$$

17

$$\begin{aligned}
 n=3 \quad \left\{ \begin{aligned} x_3 &= 0.25 \cdot 3 = \underline{0.75} \\ u_3 &= y_2 + 0.25 \cdot x_2 e^{x_2^2 - y_2} = \\ &= 0.1382302... + 0.25 \cdot 0.5 \cdot e^{0.5^2 - 0.1382302...} = \\ &= 0.2780121... \\ y_3 &= y_2 + 0.125(x_2 e^{x_2^2 - y_2} + x_3 e^{x_3^2 - u_3}) = \\ &= 0.1382302... + 0.125(0.5 e^{0.5^2 - 0.1382302...} + \\ &\quad + 0.75 e^{0.75^2 - 0.2780121...}) = \\ &= \underline{0.3327225...} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n=4 \quad \left\{ \begin{aligned} x_4 &= 0.25 \cdot 4 = \underline{1} \\ u_4 &= y_3 + 0.25 \cdot x_3 e^{x_3^2 - y_3} = \\ &= 0.3327225... + 0.25 \cdot 0.75 \cdot e^{0.75^2 - 0.3327225...} = \\ &= 0.5686575... \\ y_4 &= y_3 + 0.125(x_3 e^{x_3^2 - y_3} + x_4 e^{x_4^2 - u_4}) = \\ &= 0.3327225... + 0.125(0.75 e^{0.75^2 - 0.3327225...} + \\ &\quad + 1 \cdot e^{1^2 - 0.5686575...}) = \\ &= \underline{0.6431053...} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

För att bestämma exakta felen behövs exakt lösning. Vi vet enligt ledtråd att ODE:n (*)

är separabel: $\frac{dy}{dx} = x e^{x^2 - y} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int e^y dy = \int x e^{x^2} dx \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{Men } y(0) = 0 &\Rightarrow e^0 = \frac{1}{2} e^{0^2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{2}(1+e^{x^2}) \Leftrightarrow (18)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \ln \frac{1}{2}(1+e^{x^2})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e_0 &= y(x_0) - y_0 = y(0) - y_0 = \ln \frac{1}{2}(1+e^{0^2}) - 0 = \\ &= \ln \frac{1}{2}(1+1) = \ln 1 = \underline{\underline{0}} \quad (\text{trivial}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= y(x_1) - y_1 = y(0.25) - y_1 = \\ &= \ln \frac{1}{2}(1+e^{0.25^2}) - 0.0332654... = \\ &= \underline{\underline{-0.0015272...}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= y(x_2) - y_2 = y(0.5) - y_2 = \\ &= \ln \frac{1}{2}(1+e^{0.5^2}) - 0.1382302... = \\ &= \underline{\underline{-0.0054379...}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 &= y(x_3) - y_3 = y(0.75) - y_3 = \\ &= \ln \frac{1}{2}(1+e^{0.75^2}) - 0.3327225... = \\ &= \underline{\underline{-0.0124324...}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4 &= y(x_4) - y_4 = y(1) - y_4 = \\ &= \ln \frac{1}{2}(1+e^{1^2}) - 0.6431053... = \\ &= \underline{\underline{-0.0229908...}} \end{aligned}$$

Errata för Tentamen 2011-01-14

- Uppg. 3: På sid. 6 ska det stå
 $4/81, 32/81, 1/324, 0.003086...$ istf.
 $1/6, 4/3, 1/96, 0.001041\bar{6}$ (resp.).
- Uppg. 5: På sid. 8 ska det stå
$$f(x) = 100/(1+x^2)$$
och inte
$$f(x) = 1/(1+x^2).$$