Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

# Tentamen i Fördjupningskurs i Analys, 7,5hp

# MA059G

Datum: 2009-06-01
Skrivtid: 5 timmar
Lärare: Andreas Lind (070-6890822) och Per Edström (073-7602151)
NAT
Hjälpmedel: Formelsamling (Gymnasieformelsamling, Ekbom Tabeller och formler för NV-programmet, Natur & Kultur eller Tefyma), skriv och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

**Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor. Därutöver innehållar skrivningen en frivillig uppgift. Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen. Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge avdrag även om slutresultatet är rätt! Behandla högst en uppgift på varje papper! Glöm ej att skriva kod på varje sida.**

LYCKA TILL!!

ok! 1. **(Obligatorisk)**
Härled derivatan till $\sqrt{x}$, utgående från derivatans definition.

ok! 2. **(Obligatorisk)**
Formulera definitionen, dvs med $\varepsilon - \delta$-formalism, för $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

ok! 3. **(Obligatorisk)**
Bestäm de reella konstanterna $a$ och $b$ så att

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & , x \leq 0 \\ 2x^2 + ax + b & , x > 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig och deriverbar. Motivera väl!

ok! 4. **(Obligatorisk)**
Är $f(x) = x^3$ integrerbar på $[0, 1]$? Motivera med definitionen av integrerbarhet. Ni får vid behov använda er av

$$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 \ , \ \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \ , \ \sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4.$$

ok! 5. **(Obligatorisk)**
Betrakta påståendena:

*Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.*

*Varje kontinuerlig funktion är deriverbar.*

Bevisa eller ge motexempel på dessa påståenden.

ok! 6. **(Obligatorisk)**
Använd valfri numerisk metod i fyra steg för att lösa $x^3 + 2x - 1 = 0$ med startvärde $x_0 = 0.5$

ok! 7. **(Obligatorisk)**
Ta fram en allmän lösning till differentialekvationen $y'' - y = xe^x$.

ok! 8. **(Obligatorisk)**
Enligt nytt EU-direktiv ska alla glasstrutar ha formen av en kon och ha volymen $V$. Varje glasstrutbagare vill dessutom minimera degåtgången för varje strut, dvs varje strut ska ha så liten ytarea som möjligt. Hjälp bagaren att bestämma bästa möjliga mått av struten på strutens radie vid öppningen och strutens höjd uttryckt i $V$.

Nej! ~~9.~~ **(Frivillig)**
Antag att $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och antag att $f$ är deriverbar på $(a, b)$. Antag vidare att $\int_a^b f(x)dx = 0$. Visa att det finns ett $x \in [a, b]$ så att $f(x) = 0$.

Lösningar av Per Edström & Andreas Lind (längst bak finns lösningar av Abtin Daghighi)

# Fördjupningskurs i analys

Tenta 2009-06-01

## Lösningsskisser

①

Låt $f(x) = \sqrt{x}$

Derivatan definieras enligt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

2) Låt $f: A \to \mathbb{R}$ vara en funktion, $A \subset \mathbb{R}$.

Vi säger att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Om för varje $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ (kan bero på $\varepsilon$) så att om $0 < |x-a| < \delta$, då är $x \in A$ och

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

4) Vi ska beräkna under och översummor.

De punkter vi ska använda oss av är

$$x_i = 0 + \frac{i}{n}(1-0) = \frac{i}{n} \qquad i = 0, \ldots, n$$

Bredden på rektanglarna är

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \qquad i = 0, \ldots, n$$

Vi har att undersumman är

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i^3}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Låt $n \to \infty$, varvid

$$\lim_{n \to \infty} L(f, P) = \frac{1}{4}.$$

Vi har att översumman ges av

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{(i-1)^3}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i^3 - 3i^2 + 3i - 1) = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{3}{n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+ \frac{3}{n^4} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4} \cdot n$$

Låt nu $n \to \infty$ varvid.

$$\frac{3n(n+1)(2n+1)}{n^4 \cdot 6} \to 0$$

$$\frac{3n(n+1)}{2n^4} \to 0$$

och

$$\frac{n}{n^4} \to 0$$

Vidare så får vi att

$$\lim_{n \to \infty} U(f,P) = \frac{1}{4}.$$

Alltså är $\lim_{n \to \infty} L(f,P) = \lim_{n \to \infty} U(f,P)$

så $f$ är integrerbar på $[0,1]$

(3)

Låt $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \le 0 \\ 2x^2+ax+b, & x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ är alltid kontinuerlig och deriverbar för $x \neq 0$, ty den består då av elementära funktioner.

För kontinuitet i $x=0$ krävs att

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \iff \underline{\underline{0 = b}}$$

För deriverbarhet i $x=0$ krävs att

$$f'_-(0) = f'_+(0) \iff 2\cos 0 = 4 \cdot 0 + a$$

$$\iff \underline{\underline{a = 2}}$$

För kontinuitet och deriverbarhet krävs alltså $\underline{\underline{a = 2}}$ och $\underline{\underline{b = 0}}$.

(5)

Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.

**Sant**, ty:

Om $f$ är deriverbar i $x$ gäller att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{existerar.}$$

För att visa kontinuitet i $x$ måste vi visa

att $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

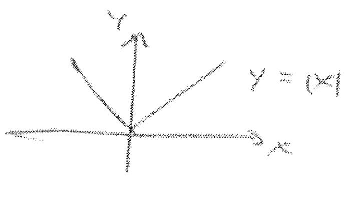
Men $\underline{\lim_{h \to 0} f(x+h)} = \lim_{h \to 0} \left( f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h \right) =$

$= f(x) + f'(x) \cdot 0 = \underline{f(x)}.$ VSB!

Varje kontinuerlig funktion är deriverbar.

**Falskt**, ty:

Se t ex $f(x) = |x|$ som är kontinuerlig i $x = 0$, men inte deriverbar där




$f'_+(0) \neq f'_-(0)$

VSB!

6). För att lösa uppgiften med fixpunktmetoden så skriver vi om ekvationen lite:

$$x^3+2x-1=0 \iff 2x = 1-x^3 \iff x = \underbrace{\frac{1-x^3}{2}}_{f(x)}.$$

Så låt $f(x) = \frac{1-x^3}{2}$. Vi söker nu en fixpunkt för $f$, dvs en punkt $x=r$ så att $f(r)=r$.

Vi får att

$$f(0{,}5) = 0{,}4375$$

$$f(0{,}4375) = 0{,}45813$$

$$f(0{,}45813) = 0{,}451923$$

$$f(0{,}451923) = 0{,}453851$$

För att använda Newtons metod så låter vi

$$f(x) = x^3+2x-1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+2.$$

Då är

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)} = 0{,}454545$$

$$x_2 \approx 0{,}453398$$

$$x_3 \approx 0{,}453398$$

$$x_4 \approx 0{,}453398$$

7). $y'' - y = xe^x$.

Vi börjar med karakteristiska ekvationen:

$0 = r^2 - 1 = (r+1)(r-1)$

Detta ger att den homogena lösningen är

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Vi ansätter därför partikulärlösningen att vara:

$$y_p = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x.$$

Derivering ger att

$$y_p' = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x =$$

$$= (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x$$

$$y_p'' = (2ax + (2a+b))e^x + (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x =$$

$$= (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b))e^x$$

Insättning i diff.ekv. ger att

$$xe^x = y_p'' - y = (4ax + (2a+2b))e^x$$

Detta ger att

$$\begin{cases} 4a = 1 \iff a = 1/4 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{4} + 2b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$$

$\iff$

$b = -\frac{1}{4}$

Alltså är $a = 1/4$ och $b = -1/4$. Så partikulärlösningen är

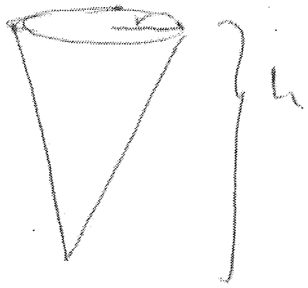
$$y_p = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)e^x$$

Delta ger att den allmänna lösningen är

$$y = y_H + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)e^x$$

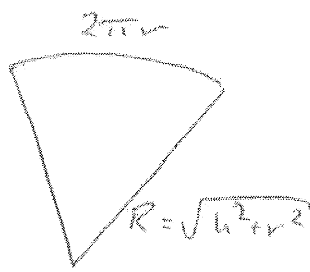
(8) Studera en kon med höjd $h$ och radie $r$. Denna har volymen

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$




Eftersom volymen är fixerad kan vi uttrycka $h$ med $r$: $h = \frac{3V}{\pi r^2}$.

Om vi tänker oss att man "klipper upp" konen blir dess mantelyta en cirkelsektor med radien $R = \sqrt{h^2 + r^2}$.




Mantelarean blir då

$$A(r) = \pi R^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi R} = \pi r R = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r \sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2}.$$

Vi söker minimum för mantelarean som en inre lokal extrempunkt till funktionen $A(r)$, dvs vi söker nollställen till $\frac{dA}{dr}$.

$$\frac{dA}{dr} = \pi \sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2} + \pi r \frac{-4 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^5} + 2r}{2\sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2 - \frac{18V^2}{\pi^2 r^4} + r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} = 2r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{r = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}}}$$

Det finns inga andra stationära punkter. Om $r$ väljs nära noll eller mycket stort kan mantelytan fås godtyckligt stor. Alltså måste detta ge minimum.

(A)

Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig,

och låt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Enligt integralkalkylens medelvärdessats

finns då en punkt $x \in [a,b]$

sådan att $$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{=0} = \underbrace{f(x)(b-a)}_{\neq 0}$$

Eftersom V.L. = 0 är H.L. = 0, och

då $(b-a) \neq 0$ måste $f(x) = 0$.

Alltså finns ett $x \in [a,b]$ så att $f(x) = 0$.

VSB!

090601

1) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \left( \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

090601

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\quad \exists \delta > 0,\ \delta \in \mathbb{R}$ sådan att

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

3. Kontinuitet: $\sin(x)$ är kontinuerlig (se föreläsningsant. för bevis)
polynom är kontinuerliga

$\Rightarrow$ alltså är $f(x)$ kontinuerlig utanför origo. (och deriverbarhet kan argumenteras ss.)
Återstår $x=0$.

vi har
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \sin(2x) = \sin(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} 2x^2 + ax + b = b \end{cases}$$

Alltså måste vi för kontinuitet välja $b = 0$.

Deriverbarhet i $x_0 = 0$: $*\ \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{2(x_0+h)^2 + a(x_0+h) - 2x_0^2 - ax_0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\cancel{2x_0^2} + ah + 4x_0h + h^2 - \cancel{2x_0^2} - \cancel{ax_0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} (4x_0 + a + h) = 4x_0 + a = a$$

$$*\ \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sin(2x_0+2h) - \sin(2x_0)}{h} \overset{x_0=0}{=}$$

$$\lim_{h\to 0} 2\underbrace{\frac{\sin(2h)}{2h}}_{\text{standard gränsvärde} = 1} = 2$$ d.v.s. vi måste välja $a = 2$ för deriverbarhet.

090601

4. $f(x) = x^3$ , integrerbar på $[0,1]$.

Vi känner igen ~~Rie~~mannsumman med övre högra hörnet vald som ~~[illegible]~~ rektanglarnas höjd:

$$I = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \Delta x_j \, f(x_j) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^3 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^4} \sum_{j=1}^{N} j^3 =$$

$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ , välj partitionen s.a. $\Delta x_j = \frac{1}{N}$, ober av $j$.

$x_0 = 0$ , $x_N = 1$

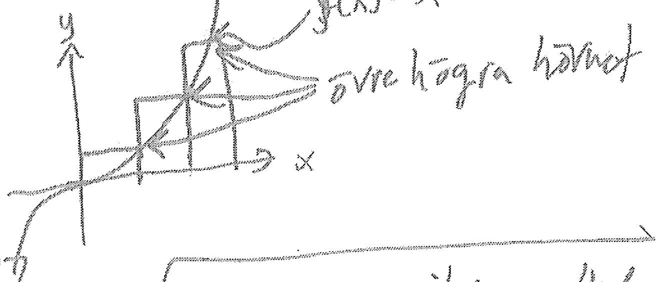
$$I = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^4} \cdot \frac{N^2(N^2+2N+1)}{4} = \frac{1}{4}$$

ledningen ger $\sum_{j=1}^{N} j^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$

Dessutom är $f(x)=x^3$ växande strikt på $[0,1]$ ty

$\frac{d}{dx} f(x) = 3x^2 > 0$ på $(0,1)$, d.v.s. faktumet att vi valt övre högra hörnet gör att vårt $I$ är större än integralen av $f(x)$ på $[0,1]$

eftertänkandet




Alltså fås $\int_0^1 f(x)\,dx < I < \infty$

d.v.s. $f(x)$ är integrerbar på $[0,1]$

Kom ihåg att den strikta definitionen är att gränsvärdet av översumman sammanfaller med gränsvärdet av undersumman och är ändlig.

090601

5.

(i) om $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar

och är $L < \infty$

så får vi $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-hL}{h} = 0$

hL och nämnaren går mot noll ⇒ även
$|f(x+h)-f(x)|$ måste gå mot noll för att
kompensera för nämnaren ⇒

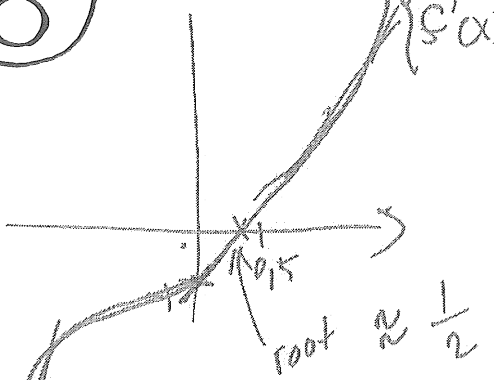
$\lim_{h\to 0\pm} f(x_0+h) = f(x_0)$, d.v.s. f kontinuerlig i $x_0$.

(ii) Motexempel $|x|$ kolla origo! (inte deriverbar)

0907601

6

Lös $\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x - 1 = 0 \\ f'(x) = 3x^2 + 2 \end{cases}$ numeriskt.




Sätt $x_0 = 1$

en
(testa $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8}$)

Newton Raphson: * $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1+2-1}{3+2}$

$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

* $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{5} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 2\frac{3}{5} - 1}{3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2} = \ldots = 0,4649$

mini
räknare

* $x_3 = \ldots 0,4535$

* $x_4 = \ldots 0,4534$

090601 7

$y'' - y = xe^x$

$y_h : r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \quad y_h = Ae^x + Be^{-x}$

Satt $\begin{cases} y_p = (ax^2 + bx + c)e^x \\ y_p' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ y_p'' = 2ae^x + (2ax+b)e^x + (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{e^x}(y_p'' - y_p) = 2a + 2ax + b + 2ax + b \quad , \frac{HL}{e^x} = x$

$\Rightarrow$ behöver $4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -a = -\frac{1}{4}$

Välj $c = 0$

$\Rightarrow y_p = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)e^x$

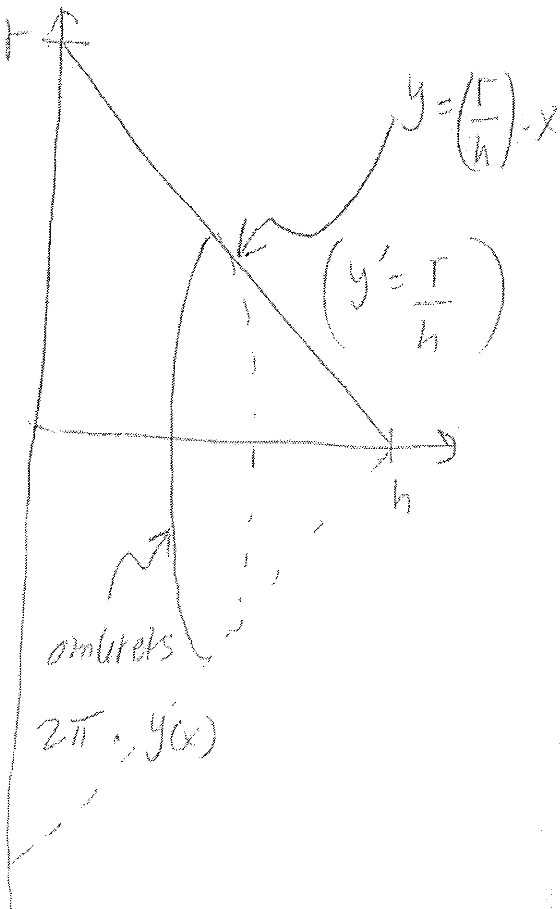
$\Rightarrow y = y_h + y_p$

Maximera ytarean

090801

$$\boxed{V = \frac{r^2 \pi h}{3}} \Rightarrow h = \frac{3V}{r^2 \pi} \quad (*)$$

8.


Ytarea: $S_{mantel} = 2\pi \int_{x=0}^{x=h} y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx$

(utan basen)

$$= 2\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right) \cdot x \cdot \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\, dx$$

$$2\pi \frac{r}{h} \sqrt{\frac{h^2+r^2}{h^2}} \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h}_{=\frac{h^2}{2}} = \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{h}} \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{2}} = \boxed{\pi r \sqrt{h^2+r^2} = S_{mantel}}$$

consulting pg 0906 1 (8)

$$S(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}\sqrt{\frac{3V}{\pi h}+h^2}$$

$$\left(V=\frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow r^2=\frac{3V}{\pi h}\right) \qquad = S(h)$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{\pi h}}\sqrt{9V^2+3V\pi h^3}$$

$$S'(h) = \frac{\frac{3V\pi\cdot 3h^2}{\sqrt{9V^2+3V\pi h^3}}\cdot h - \sqrt{9V^2+3V\pi h^3}}{h^2}$$

$$S'(h)=0 \Rightarrow \cancel{3V}\pi\, 3h^3 = 9V^2+\cancel{3V}\pi h^3$$

$$\Rightarrow 6\pi h^3 = 9V \Rightarrow h^3=\frac{3V}{2\pi} \Rightarrow h=+\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{3V}{\pi\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{1/3}}} = \sqrt{\frac{(3V)^{2/3}}{\pi^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}}}$$

$$= \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}\cdot 2^{1/3}$$