Testtenta #1

Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen i Fördjupningskurs i Analys, 7,5hp

ok! 1. Visa med definitionen att $\lim_{x\to a} 2x = 2a$ för alla $a \in \mathbb{R}$.

ok! 2. (*a*) Ge definitionen för när en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $x = a$.

ok! (*b*) Definiera $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ genom

$$f = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x} & x > 1 \\ a\cos(\pi x) & x \leq 1 \end{cases}.$$

Bestäm a så att f blir kontinuerlig $x = 1$.

ok! 3. Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + y = xe^x$.

ok! 4. Säg att du vill bygga ett vattentråg med formen av en halv cylinder som ska rymma $10m^3$ vatten. Vilka dimensioner ska tråget ha om materialåtgången ska bli så liten som möjligt.

ok! 5. Avgör med integraltestet för vilka p som serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ konvergerar.

ok! 6. Betrakta ekvationen $\sin(x) + x^2 - 1 = 0$. Använd Newtons metod i fyra steg för att approximera en rot till denna ekvation. Använd startvärdet $x_0 = 2/3$ och svara med fyra decimaler.

ok! 7. Visa att $f(x) = 2x + 3$ är integrerbar på $[-1, 1]$. Vad blir $\int_{-1}^{1}(2x + 3)dx$? Utan Analysens huvudsats!

ok! 8. Visa att $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ med definitionen av derivatan.
Ledning: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Lycka till!

Andreas Lind

① Jens Persson

Lösningar till testtenta #1 2009

1. Visa $\lim_{x \to a} 2x = 2a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

m.h.a. (formella) definitionen.

Lösning: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Då gäller:

$$|2x-2a| = |2(x-a)| = 2|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

vill ha detta

$$\Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon/2$$

Välj $\delta = \varepsilon/2$ och man får därför önskad implikation

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |2x-2a| < \varepsilon \qquad \square$$

---

2. a) Definition för när f kontinuerlig i $x=a$.

Lösning: f är kontinuerlig i $x=a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \square$$

b) Funktion $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x}, & x > 1 \\ a \cos \pi x, & x \leq 1 \end{cases}$

Bestäm a s.a. f kont. i $x=1$.

Lösning: Enl. a) ska gälla

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = a \cos \pi = -a$$

Men $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x} =$

$$= \frac{\sqrt{1+1}-\sqrt{1-1}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} a\cos \pi x = -a$$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x)$ för existens av $\lim_{x\to 1} f(x)$:

$$\sqrt{2} = -a \quad \Leftrightarrow \quad a = -\sqrt{2}$$

Då har vi kontinuitet, dvs. $\boxed{a=-\sqrt{2}}$.

---

3. Lös $y''-2y'+y = xe^x$ (*)

Lösning: • Homogen version av (*): $y''-2y'+y=0$ (†)

kar. ekv.: $r^2-2r+1=0$

$$(r-1)^2=0$$

$$r=1 \quad \text{(dubbel)}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = (C+Dx)e^x$$

• Partikulärlösning: $HL_{(*)} = xe^x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ansätt $y_p(x) = x^m A_1(x)e^x$

där $A_1(x) = A+Bx$ (förstagradspol.)

$m=0 \Rightarrow y_p$ löser (†) (d.v.s. båda y_p-termerna)

$m=1 \Rightarrow y_p$-termen Axe^x löser (†)

$\Rightarrow m=2$ måste väljas!

③

d.v.s. $y_p(x) = x^2(A+Bx)e^x = (Ax^2+Bx^3)e^x$

$\Rightarrow y_p'(x) = (2Ax+3Bx^2)e^x+(Ax^2+Bx^3)e^x$

$= (2Ax+(3B+A)x^2+Bx^3)e^x$

$\Rightarrow y_p''(x) = (2A+2(3B+A)x+3Bx^2)e^x +$

$+(2Ax+(3B+A)x^2+Bx^3)e^x =$

$= (2A+2(3B+2A)x +$

$+(6B+A)x^2+Bx^3)e^x$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i $(*)$:

$(2A+2(3B+2A)x+(6B+A)x^2+Bx^3)e^x -$

$-2(2Ax+(3B+A)x^2+Bx^3)e^x +$

$+(Ax^2+Bx^3)e^x = xe^x$

$\Updownarrow$

$2A+(6B+4A)x+(6B+A)x^2+Bx^3 -$

$-4Ax-(6B+2A)x^2-2Bx^3+Ax^2+Bx^3 = x$

$\Updownarrow$

$2A+6Bx = x$

d.v.s. $2A=0$ och $6B=1 \Leftrightarrow A=0, B=1/6$

$\Rightarrow y_p(x) = x^2(0+\frac{1}{6}x)e^x = \frac{1}{6}x^3e^x$

$\Rightarrow y(x) = y_h(x)+y_p(x) =$

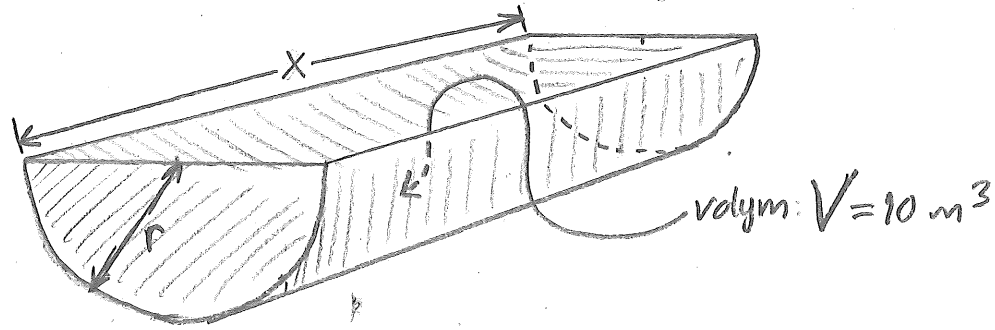
$= (C+Dx)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x =$

$= \underline{\underline{(C+Dx+\frac{1}{6}x^3)e^x}}$

4.

Vattentråg halvcylinder $10 m^3$.
Dimensioner för minsta materialåtgång?

Lösning:



• Materialarea: $A = 2 \cdot \text{ändareor} + \text{bottenarea} =$

(ska minimeras)

$$= 2\,\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\,2\pi r \cdot x =$$

$$= \pi r^2 + \pi r x = \pi r (r + x)$$

• Volym: $V = \text{ändarea} \cdot \text{trålängd} =$

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot x$$

Men $V = 10\ m^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi r^2 x = 10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{20}{\pi x} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{20}{\pi x}}$$

$$\Longrightarrow A(x) = \pi \sqrt{\frac{20}{\pi x}} \left(\sqrt{\frac{20}{\pi x}} + x \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{20}{\pi x} + \sqrt{\frac{20}{\pi}} \sqrt{x} \right) =$$

$$= 20x^{-1} + \sqrt{20\pi}\, x^{1/2}, \quad x \in (0, \infty)$$

Notera att $\lim_{x \to 0+} A(x) = +\infty$ och $\lim_{x \to \infty} A(x) = +\infty$

och att A har ändlig area för $x \in (0, \infty)$ så gäller enligt Sats (se sid. 10 i Förel. 5) att A har ett

(5) minsta värde på $(0, \infty)$. Detta antas i en kritisk punkt ty singulära pkter och änd-pkter saknas.

$$A'(x) = -20x^{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\, x^{-1/2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x^{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\, x^{-1/2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\, x^{-1/2} = 20x^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{1}{\sqrt{20\pi}} x^{1/2} = \frac{1}{20} x^{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{20\pi} x = \frac{1}{400} x^{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{20\pi} 400 = x^{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{80}{\pi}\right)^{1/3}$$

Kontroll: $$A\left(\left(\frac{80}{\pi}\right)^{1/3}\right) = -20\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-2/3} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} =$$

$$= -20\left(\left(\frac{80}{\pi}\right)^{4}\right)^{-1/6} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} =$$

$$= -20\left(\left(\frac{80}{\pi}\right)^{3}\right)^{-1/6}\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} =$$

$$= \left(-20\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/2} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\right)\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} =$$

$$= \left(-20\left(\frac{1600}{20\pi}\right)^{-1/2} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\right)\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} =$$

$$= \left(-20\frac{\sqrt{20\pi}}{40} + \frac{1}{2}\sqrt{20\pi}\right)\left(\frac{80}{\pi}\right)^{-1/6} = 0, \text{ ok}$$

Vi har ett minsta värde i $x = \left(\frac{80}{\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{10 \cdot 8}{\pi}\right)^{1/3} = 2(10/\pi)^{1/3} = 2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} \pi^{-\frac{1}{3}}$

$$\Longrightarrow r = \left(\frac{20}{\pi \cdot 2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} \pi^{-\frac{1}{3}}}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{10}{10^{1/3}\pi^{2/3}}\right)^{1/2} = \left(10^{2/3}\pi^{-2/3}\right)^{1/2} =$$

$$= 10^{1/3}\pi^{-1/3} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{\text{d.v.s. tråget ska ha längden } \left(\frac{80}{\pi}\right)^{1/3} \text{ m och radien } \left(\frac{10}{\pi}\right)^{1/3} \text{ m.}}$$

---

5. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, avgör m. integralkriteriet för vilka p den konvergerar

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = n^{-p}$. Låt $f(t) = t^{-p}$

Då gäller $a_n = f(n)$. Enligt integralkriteriet med $N=1$ att serien konv. omm integralen $\int_1^{\infty} f(t)\,dt = \int_1^{\infty} t^{-p}\,dt$ konv.

$$\int_1^{\infty} t^{-p}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} t^{-p}\,dt =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{R\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right)\Big|_1^R, & p \neq 1 \\ \lim\limits_{R\to\infty} (\ln|t|)\Big|_1^R, & p = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(\lim\limits_{R\to\infty} R^{1-p} - 1\right), & p \neq 1 \\ \lim\limits_{R\to\infty} R, & p = 1 \end{cases}$$

Tre fall:

- $R^{1-p} \to \infty$ omm $1-p > 0 \Leftrightarrow p < 1$, divergens

⑦ • $R^{1-p} \to 0$ omm $1-p<0 \Leftrightarrow p>1$, konvergens
• $p=1$ ger divergens ty $\ln R \to \infty$.

$$\boxed{\text{Vi drar slutsatsen att Serien konvergerar om } p>1 \text{ men divergerar mot } \infty \text{ om } p \leq 1.}$$

---

6. Newtons metod i fyra steg för att appr. rot till $\sin x + x^2 - 1 = 0$ med $x_0 = 2/3$. (4 decimaler.)

Lösning: Newtons metod: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Här gäller $f(x) = \sin x + x^2 - 1$ $(=0)$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x + 2x$$

Vi får: $x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n + x_n^2 - 1}{\cos x_n + 2x_n}$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3} - \frac{\sin 2/3 + (2/3)^2 - 1}{\cos 2/3 + 2(2/3)} = 0.63702\ldots$$

$$x_2 = 0.63702\ldots - \frac{\sin 0.63702\ldots + 0.63702\ldots^2 - 1}{\cos 0.63702\ldots + 2 \cdot 0.63702\ldots} =$$

$$= 0.63673\ldots$$

$$x_3 = 0.63673\ldots$$

$$x_4 = 0.63673\ldots$$

Ekvationen har en rot som till fyra decimaler är $\underline{\underline{0.6367}}$.

7. Visa $f(x) = 2x+3$ integrerbar på $[-1,1]$. ⑧
Vad blir $\int_{-1}^{1}(2x+3)\,dx$? (utan Analysens huvudsats)

Lösning: f kont. på $[a,b] \Rightarrow f$ integrerbar på $[a,b]$ enligt satsen på sid. 7 i Förel. 7

$\Rightarrow$ f är integrerbar på $[-1,1]$!

Beräkna $I = \int_{-1}^{1}(2x+3)\,dx$ utan Analysens huvudsats. vet integrerbar

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f,P,c) \quad , f(x) = 2x+3$$

$$R(f,P,c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad \text{(Riemann-summa)}$$

där $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$

och $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Låt P vara likformig partition, dvs.

$$\Delta x_i = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n} \quad \text{så att } x_i = \frac{2i}{n} - 1$$

Välj $c_i = x_i = \frac{2i}{n} - 1$

$$\Rightarrow R(f,P,c) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n} - 1\right)\frac{2}{n} =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{2i}{n} - 1\right) + 3\right) =$$

(9)

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n}i+1\right) = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \frac{8}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n}n = 4\left(1+\frac{1}{n}\right)+2 =$$

$$= \frac{4}{n}+6$$

$$\Longrightarrow I = \lim_{n\to\infty} R(f,P,c) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}+6\right) =$$

$$= 0+6 = 6$$

d.v.s $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x+3)\,dx = \underline{\underline{6}}$

---

8. Visa $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ med derivatans definition. (Ledtråd: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$)

Lösning: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Här: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$

$$= [\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\,\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\,\frac{\sin h}{h}\right) =$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} =$$

⑩

$= [\text{Enligt given ledtråd}] =$

$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x,$

d.v.s. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\square$