Testtenta #2.

Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Testtenta i Fördjupningskurs i Analys, 7,5hp

ok! 1. Varför är inte $f(x) = |x|$ deriverbar i $x = 0$? Är $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$? Bevisa dina påståenden!

ok! 2. Visa att $\lim_{x \to m}(ax + b) = am + b$ för alla $m \in \mathbb{R}$.

ok! 3. Är $f(x) = |x|$ integrerbar på $[-1, 1]$. Använd definitionen för att visa detta.

ok! 4. Betrakta ekvationen $x - 1 + \sin(x) + \cos(x) = 0$. Använd fixpunktsmetoden (iterationsmetoden) i fyra steg för att hitta en lösning till ekvationen med starvärde $x_0 = 0.5$. Ange fyra decimaler i ditt svar.

ok! 5. Lös differentialekvationen $y'' - y = e^x \cos(x)$.

ok! 6. Hitta minsta möjliga volymen av en kon som innehåller en sfär med radie r.

ok! 7. Använd derivatans definition för att derivera $\int_a^x f(t)dt$.

ok! 8. Betrakta serien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$. Använd integraltestet för att avgöra om serien konvergerar eller ej. Om serien konvergerar, beräkna då vad serien konvergerar mot.

Lycka till!

Andreas Lind

Lösningsskisser, testtenta 2

(1) $f(x) = |x|$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow$ Kontinuerlig i $x = 0$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \to$ Ej deriverbar i $x = 0$

---

(2) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

Vi söker $\delta > 0$ så att

$0 < |x - m| < \delta$ gör att $|(ax+b) - (am+b)| < \varepsilon$

$|(ax+b) - (am+b)| = a|x-m| < \varepsilon$

Låt nu $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$. Vi ser då att

$0 < |x-m| < \delta$ gör att $|(ax+b) - (am+b)| < \varepsilon$

Alltså är $\lim_{x \to m} (ax+b) = am+b$

för alla $m \in \mathbb{R}$.

VSB!

3. $f(x) = |x|$ är symmetrisk på $[-1, 1]$, och är integrerbar på $[-1, 1]$ precis då $g(x) = x$ är integrerbar på $[0, 1]$.

Välj en likformig indelning av $[0, 1]$

$$\Rightarrow \begin{cases} L(g, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \\ U(g, P_n) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \to \infty} L(g, P_n) = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \to \infty} U(g, P_n) = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lika!}$$

$\Rightarrow$ g är integrerbar på $[0, 1]$

$\Rightarrow$ f är integrerbar på $[-1, 1]$

VSB!

$L(g, P_n)$ är mindre än alla översummor

$U(g, P_n)$ är större än alla undersummor

Alltså är talet $\frac{1}{2}$ det unika tal som finns mellan mängden av alla undersummor och mängden av alla översummor.

Eftersom ett sådant tal finns är g integrerbar på $[0, 1]$.

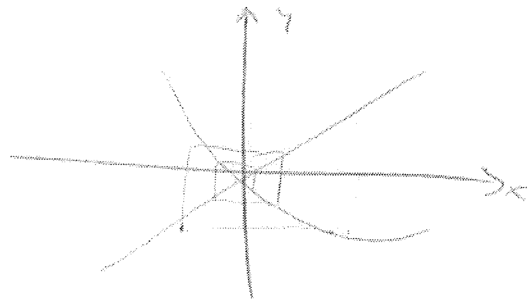
(4) Låt $f(x) = 1 - \sin x - \cos x$

Ekvationen $x - 1 + \sin x + \cos x = 0$

har lösning precis då $f(x) = x$

Fixpunktsmetoden ger $x_{n+1} = f(x_n)$

n	x_n
0	0,5
1	−0,3570
2	0,4125
3	−0,3170
4	0,3616



---

(5) $y'' - y = e^x \cos x$

Kar. ekv. $r^2 - 1 = 0$

$r = \pm 1 \Rightarrow y_h = Ae^x + Be^{-x}$

Ansats: $y_p = e^x(a\cos x + b\sin x)$

$y_p' = e^x(a\cos x + b\sin x) + e^x(-a\sin x + b\cos x) =$

$= e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x)$

$y_p'' = e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + e^x(-(a+b)\sin x + (b-a)\cos x) =$

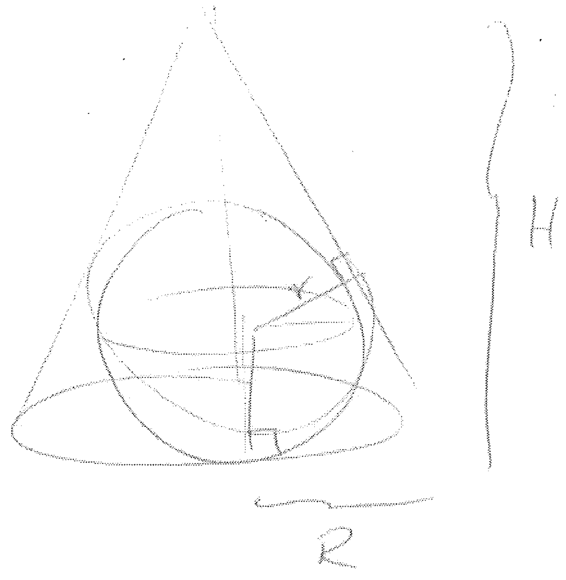
$= 2e^x(b\cos x - a\sin x)$

$\Rightarrow y_p'' - y_p = e^x((2b-a)\cos x + (-2a-b)\sin x) \equiv e^x\cos x$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b - a = 1 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = \underline{Ae^x + Be^{-x} + e^x\left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right)}$

(6.)



$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Likformighet ger

$$\frac{r}{H-r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}$$

$$\frac{r^2}{(H-r)^2} = \frac{R^2}{R^2+H^2}$$

$$r^2(R^2+H^2) = R^2(H-r)^2$$

$$r^2R^2 + r^2H^2 = R^2H^2 + R^2r^2 - 2R^2Hr$$

$$r^2H^2 = R^2(H^2-2Hr)$$

$$R^2 = \frac{r^2H^2}{H^2-2Hr}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi r^2 H^2 \cdot H}{3(H^2-2Hr)} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{H^3}{H^2-2Hr}$$

Minimera $\frac{H^3}{H^2-2Hr}$ m.a.p. H.

Sök nollställe för derivatan

$$f(H) = \frac{H^3}{H^2-2Hr}$$

$$\Rightarrow f'(H) = \frac{3H^2(H^2-2Hr) - H^3(2H-2r)}{(H^2-2Hr)^2}$$

$$= \frac{H^4-4H^3r}{(H^2-2Hr)^2}$$

$$f'(H) = 0 \iff H^4 = 4H^3r$$

$$H = 4r$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{r^2(4r)^2}{(4r)^2 - 2\cdot 4r\cdot r} = \frac{16r^4}{8r^2} = 2r^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi\, 2r^2\, 4r}{3} = \frac{8\pi r^3}{3}$$

Resonemang om max/min ...

7.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \left[\begin{array}{l} \text{integralkalkylens} \\ \text{medelvärdessats} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ c \text{ mellan} \\ x \text{ och } x+h}}{f(c)} (x+h-x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(c)\,h =$$

$$= \lim_{h \to 0} \underset{\substack{\uparrow \\ c \text{ mellan} \\ x \text{ och } x+h}}{f(c)} = [\text{enl. kontinuitet}] = \underline{f(x)}$$

---

8. längden av i hursom.

Jens Perssons lösning av 8. :

8. Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = 2^{-n}$

• Integralkriteriet: Låt $f(t) = 2^{-t}$, då gäller $a_n = f(n)$. Enligt integralkriteret gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar omm $\int_N^{\infty} f(t)dt$ konvergerar f.n. $N \in \mathbb{N}$. Låt $N=1$

$$\Rightarrow \int_N^{\infty} f(t)dt = \int_1^{\infty} 2^{-t}dt = \lim_{R\to\infty} \int_1^R (1/2)^t dt$$

$$= \left[\frac{d}{dt}a^t = a^t \ln a \text{ om } a>0\right] =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 1/2}(1/2)^t\right)\Big|_1^R =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\left(\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^R - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\ln 2}\left(0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\ln 2} < \infty \text{, d.v.s. konvergerar}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Serien konvergerar också}}$

• Seriesumman: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ är en geometrisk serie. Vi har:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = [\text{Sats sid. 2 i Förel. 10}] =$$

$$= \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2-1} = \underline{\underline{1}}$$