

Mittuniversitetet
DMA
Pia Heidtmann & Kristoffer Karlsson,

Inlämningsuppgifter
Preparandkurs för matematik på högskolan (MA015X).

Lämnas in senast torsdag 5 september 2013 kl. 15.00
till Andreas Lind i rum O218.

Lös endast en uppgift per blad och skriv endast på en sida. En inlämnad lösning som är gjord på ett tillfredsställande sätt renderar godkänt betyg på kursen. Lösningarna skall alltså presenteras på ett sådant sätt att uträkningar, ekvationslösningar och resonemang är lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt svar.

1. Förenkla uttrycken så långt som möjligt

a) $\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$

b) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

c) $\frac{\ln(\sqrt{2}) + \ln(4) - \ln(\frac{1}{2})}{\ln(2)}$ (utan miniräknaren!!)

2. Lös ekvationerna

a) $4x^2 + 11x = 3$

b) $11\sqrt{x} = 3 - 4x$

c) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$

d) $9 \cdot 2^{x-1} - 4^x = 2$

3. Lös ekvationerna

a) $|x+1| - 1 = 2x + |3x+2|$

b) $x^{2/3} = 4$

c) $\frac{1}{2} \log_2(x+4) = \frac{1}{2} + \log_2(x+1)$

d) $2 \cos(4x) = \sqrt{3}$

4. Lös olikheterna

a) $\frac{(2-x)(x+3)(2x-5)}{x^2-1} \geq 0$

b) $x^2 + 2x - 3 < 0$

c) $|2x-5| < 3$

5. Betrakta funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{om } x < 0; \\ \sqrt{x+1} - 4 & \text{om } 0 \leq x \leq 3; \\ 2x - 8 & \text{om } x > 3. \end{cases}$$

a) Ange funktionens definitionsmängd D_f .

b) Skissa funktionens graf och ange funktionens värdemängd V_f .

Preklaus MA015X Inlämningsuppgift augusti 2013

$$(1) (a) \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x+2) + (x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$(b) (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1) = (x^8-1)(x^8+1)$$

$$(c) \frac{\ln(\sqrt{2}) + \ln(4) - \ln(\frac{1}{2})}{\ln(2)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(2) + 2\ln(2) - (-1\ln(2))}{\ln(2)} = \frac{\frac{7}{2}\ln(2)}{\ln(2)} = \frac{7}{2}$$

$$(2) (a) 4x^2 + 11x = 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 11x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{8} = \frac{-11 \pm 13}{8} = \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(b) 11\sqrt{x} = 3 - 4x \Leftrightarrow 4x + 11\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -3 \text{ eller } \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

m.h.a. (2)(a)

$$\text{Alt: } 11\sqrt{x} = 3 - 4x \Rightarrow 121x = 16x^2 - 24x + 9 \Rightarrow 16x^2 - 145x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{145 \pm \sqrt{145^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{32} = \frac{145 \pm 143}{32} = \begin{cases} \frac{1}{16} \\ 9 \end{cases}$$

$$11\sqrt{9} \neq 3 - 4 \cdot 9 \text{ medan } 11\sqrt{\frac{1}{16}} = 3 - 4 \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow 9 \text{ är en falsk rot}$$

$$\text{och lösningen är då } \underline{x = \frac{1}{16}}$$

$$(c) \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Rightarrow \underline{x = 2 \text{ eller } x = -4}$$

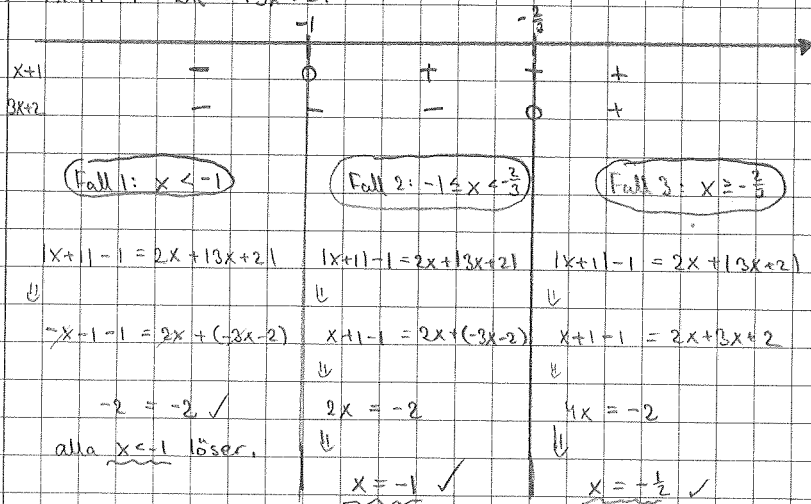
$$(d) 9 \cdot 2^{x-1} - 4^x = 2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{x-1} - (2^x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x - 2 \cdot (2^x)^2 = 4$$

$$\text{Låt } y = 2^x \text{ då blir ekvationen } 9y - 2y^2 = 4 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^x = y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} = \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \log_2 2^x = \log_2 4 \text{ eller } \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{x = 2 \text{ eller } x = -1}$$

$$(5) (a) |x+1| - 1 = 2x + 13x + 21$$



$$\text{Lös: } \underline{x \leq -1 \text{ eller } x = -\frac{1}{2}}$$

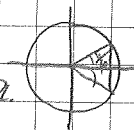
③ (b) $x^{2/3} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4^3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{64} = \pm 8$

(c) $\frac{1}{2} \log_2(x+4) = \frac{1}{2} + \log_2(x+1) \Rightarrow \log_2 \sqrt{x+4} - \log_2(x+1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \left(\frac{\sqrt{x+4}}{x+1} \right) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \frac{\sqrt{x+4}}{x+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x+4}{(x+1)^2} = 2 \Rightarrow x+4 = 2(x^2+2x+1)$
 $\Rightarrow 2x^2+3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$

Men $\log_2(x+1)$ är inte definierad för $x=-2$, som då är en falsk rot, och lösningen är då $x = \frac{1}{2}$

(d) $2 \cos(4x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$



④ (a) $\frac{(2-x)(x+3)(2x-5)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

	-3		-1		1		2		$\frac{5}{2}$
2-x	+	+	+	+	+	+	0	-	-
x+3	-	0	+	+	+	+	+	+	+
2x-5	-	-	-	-	-	-	-	0	+
1/x-1	-	-	-	-	odet	+	+	+	+
1/x+1	-	-	odet	+	+	+	+	+	+
V.L.	+	0	-	odet	+	odet	-	0	0

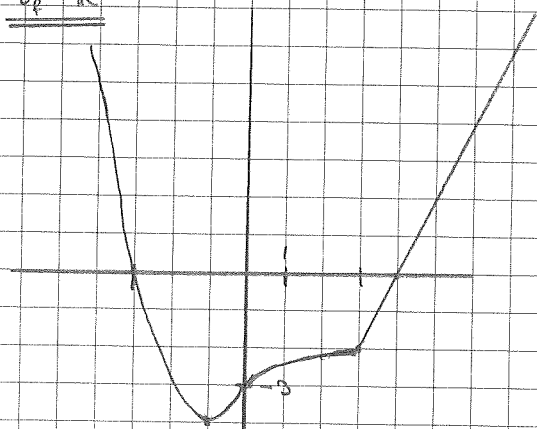
$\Rightarrow x \leq -3$ eller $-1 < x < 1$ eller $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

(b) $x^2+2x-3 < 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) < 0 \Leftrightarrow \underline{-3 < x < 1}$

(c) $|2x-5| < 3 \Leftrightarrow 5-3 < 2x < 5+3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 8 \Leftrightarrow \underline{1 < x < 4}$

⑤ (a) $D_f = \mathbb{R}$

(b)



$f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ om $x < -3$
 $= (x+1)^2 - 4$

som då har en rot i $x = -3$ och minimum $y = -4$ där $x = -1$. Grafen är en del av en parabel

för $x > 3$ är $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow$ grafen är en rät linje med lutning 2.

för $0 \leq x \leq 3$ är $f(x) = \sqrt{x+1} - 4$

en växande funktion med grafen

$\Rightarrow V_f = [-4, \infty[$