

Avdelningen för ämnesdidaktik och matematik (DMA)

Avdelningen för kvalitetsteknik, maskinteknik och matematik (KMM)

MATEMATISK FORMELSAMLING

UPPLAGA 3

(Utkast 22 aug, 2013)



Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Innehåll

1	Notation, mängdlära och logik	1
2	Algebra	3
3	Komplexa tal	6
4	Punkter, vektorer och plan i rummet	7
5	Geometri	8
6	Trigonometri	9
7	Några standardgränsvärden	12
8	Derivator	13
9	Integraler	15
10	Differentialekvationer	17
11	Matematisk statistik	18

1 Notation, mängdlära och logik

Mängder och tal

$\emptyset$	tomma mängden, $\{\}$
$\mathbb{Z}$	mängden av heltal, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}_+$	mängden av positiva heltal, $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}_-$	mängden av negativa heltal, $\{\dots, -3, -2, -1\}$
$\mathbb{N}$	mängden av naturliga tal, $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\{x \in \mathbb{Z} : P\}$	mängden av alla x i $\mathbb{Z}$ som uppfyller egenskapen P
$\{x \in \mathbb{Z} \mid P\}$	samma som $\{x \in \mathbb{Z} : P\}$
$\mathbb{Q}$	mängden av rationella tal, $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	mängden av reella tal
$\mathbb{R}_+$	mängden av positiva reella tal, $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{R}_-$	mängden av negativa reella tal, $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$
$[a, b]$	det slutna intervallet från a till b , $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$]a, b[$	det öppna intervallet från a till b , $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
(a, b)	samma som $]a, b[$
$\mathbb{C}$	mängden av komplexa tal, $\{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$

De positiva primtalen ≤ 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Symboler från mängdlära

$A = B$	A är lika med B
$A \neq B$	A är inte lika med B
$a \in A$	elementet a finns i mängden A
$a \notin A$	elementet a finns inte i mängden A
$A \cup B$	unionen av mängderna A och B , $\{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$
$A \cap B$	snittet av mängderna A och B , $\{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$
$A - B$	skillnaden mellan mängderna A och B , dvs $\{x \in A : x \notin B\}$
$A \setminus B$	samma som $A - B$
$\overline{B}$	den komplementära mängden till B , det vill säga om B är en delmängd till den universella mängden $\mathcal{U}$ så är $\overline{B} = \{x \in \mathcal{U} : x \notin B\}$
B^c	samma som $\overline{B}$
$A \subseteq B$	A är en delmängd till B , $x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \subset B$	A är en äkta delmängd till B , dvs $A \subseteq B$ och $A \neq B$
$A \times B$	den kartesiska produkten av mängderna A och B , dvs mängden av alla ordnade par (a, b) sådana att $a \in A$ och $b \in B$
$\mathcal{P}(A)$	potensmängden till A , dvs mängden av alla delmängder till A

Viktiga likheter inom mängdlära

$$\begin{aligned}\text{Associativa lagar:} \quad & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Kommutativa lagar:} \quad & A \cup B = B \cup A \\ & A \cap B = B \cap A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Distributiva lagar:} \quad & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De Morgans lagar:} \quad & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

Logiska symboler

$\neg p$	icke p
$p \vee q$	p eller q
$p \wedge q$	p och q
$p \Rightarrow q$	p implicerar/medför q
$p \Leftrightarrow q$	p är ekvivalent med q

Viktiga ekvivalenser inom logik

$$\begin{aligned}\text{Associativa lagar:} \quad & (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ & (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Kommutativa lagar:} \quad & p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \\ & p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Distributiva lagar:} \quad & p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ & p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De Morgans lagar:} \quad & \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \\ & \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q\end{aligned}$$

Logiska ekvivalenser för bevisföring

Att bevisa $p \Leftrightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa $p \Rightarrow q$ och $q \Rightarrow p$

Att bevisa $p \Rightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa $\neg q \Rightarrow \neg p$

2 Algebra

Symboler för relationer mellan tal

$a = b$	a är lika med b
$a \neq b$	a är inte lika med b
$a < b$	a är (strikt) mindre än b
$a > b$	a är (strikt) större än b
$a \leq b$	a är mindre än eller lika med b
$a \geq b$	a är större än eller lika med b
$a b$	heltalet a delar heltalet b

Viktiga likheter för aritmetik

Associativa lagar:	$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$
Kommutativa lagar:	$a + b = b + a, \quad ab = ba$
Distributiva lagen:	$a(b + c) = ab + ac$
Lagen om nolldelare:	Om $ab = 0$ så är $a = 0$ eller $b = 0$

Kvadreringsreglerna och konjugatregeln

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Kubregler

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Summor av kuber

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Andragradspolynom

Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

där $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

Absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Kvadratrötter

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{ab} & a \geq 0, \quad b \geq 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} & a \geq 0, \quad b > 0 \\ \sqrt{a^2 b} &= |a| \sqrt{b} & b \geq 0 \end{aligned}$$

Potenser

x, y, a, b , reella tal $a, b > 0$, och n ett positivt heltal

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} & \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^x b^x &= (ab)^x & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} & a^0 &= 1 & a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \end{aligned}$$

Logaritmer

För positiva reella tal x, y, a, b , där $a, b \neq 1$ gäller

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y & \lg xy &= \lg x + \lg y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y & \lg \frac{x}{y} &= \lg x - \lg y \\ \log_a x^p &= p \cdot \log_a x & \lg x^p &= p \cdot \lg x \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} & \lg x &= \frac{\ln x}{\ln 10} \end{aligned}$$

där

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x \qquad 10^y = x \Leftrightarrow y = \lg x \qquad e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$$

$\log_{10}$ skrivs oftast $\lg$

$\log_e$ skrivs oftast $\ln$

Några summationsformler

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^n r &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{r=1}^n r^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{r=1}^n r^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \sum_{r=0}^n x^r &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad \text{där det reella talet } x \neq 1\end{aligned}$$

Binomialsatsen

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

där n är ett positivt heltal, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ och $0! = 1$.

3 Komplexa tal

Definition

Ett komplext tal z kan skrivas $z = a + ib$ där a och b är reella tal och i är ett tal som uppfyller $i^2 = -1$.

Talen $z = a + ib$ och $\bar{z} = a - ib$ kallas konjugerade.

Belopp

Beloppet $|z|$ av $z = a + ib$ är $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Polär form

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \quad \text{där } r = |z| \text{ och } \varphi = \arg(z)$$

De Moivre

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r^n e^{in\varphi}$$

Multiplikationsregler

Om $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ så är

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

4 Punkter, vektorer och plan i rummet

Avståndet mellan punkterna (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2)

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}$$

Avståndet från punkten (x_1, y_1, z_1) till planet $ax + by + cz = d$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Normen (längden) av vektorn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Skalarprodukten av vektorerna $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

Projektion av vektorn $\mathbf{u}$ på vektorn $\mathbf{a}$

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

Cauchy–Schwarz olikhet

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

5 Geometri

Cirkel

r cirkelns radie, A area, O omkrets

$$A = \pi r^2$$

$$O = 2\pi r$$

Pyramid

B bottenarea, h höjd, V volym

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Rak cirkulär cylinder

r radie, h höjd, S mantelarea (ytarea), V volym

$$S = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

Rak cirkulär kon

r radie, h höjd, s sida, S mantelarea (ytarea), V volym

$$S = \pi rs$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Sfär

r radie, S mantelarea (ytarea), V volym

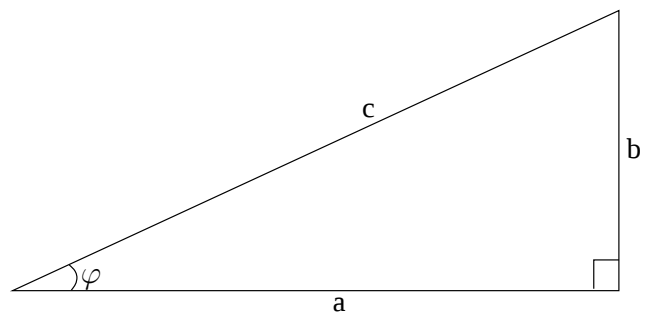
$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

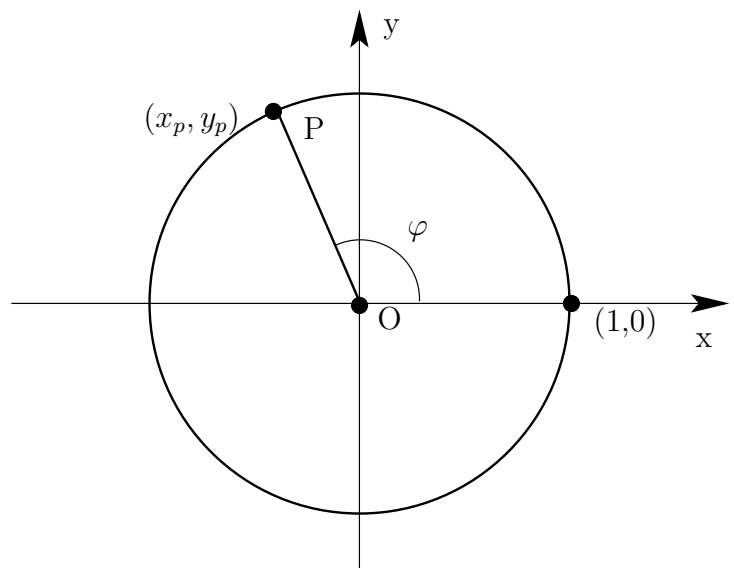
6 Trigonometri

Rätvinklig triangel

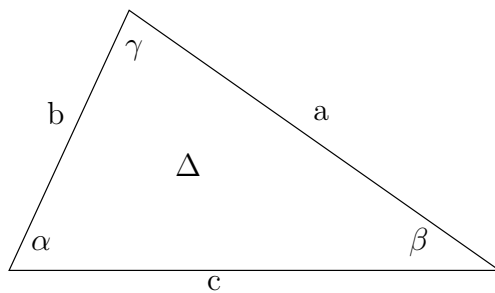
$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{b}{c} \\ \cos \varphi &= \frac{a}{c} \\ \tan \varphi &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$



Enhetscirkeln



$$\begin{aligned}\sin \varphi &= y_p & \cos \varphi &= x_p \\ \tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} & \cot \varphi &= \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\end{aligned}$$



Areasatsen för triangeln Δ

$$\text{area } \Delta = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

Sinussatsen

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Additionsreglerna

$$\begin{aligned} \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \\ \sin(\varphi - \psi) &= \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \cos(\varphi - \psi) &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \end{aligned}$$

Trigonometriska ettan

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Formlerna för dubbla vinkeln

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi) &= 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \cos(2\varphi) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Uttryck på formen $a \sin x + b \cos x$

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + y)$$

där $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos y = \frac{a}{r}$ och $\sin y = \frac{b}{r}$

Några exakta värden för trigonometriska funktioner

Vinkel φ		$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$
grader	radianer			
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	ej def.
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180	π	0	-1	0
210	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
270	$3\pi/2$	-1	0	ej def.
300	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
360	2π	0	1	0

7 Några standardgränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

8 Derivator

Definition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivator av några funktioner

Funktion	Derivata
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Produktregeln

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Kvotregeln

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kedjeregeln

$$\begin{aligned}h(x) &= f(g(x)) \\h'(x) &= f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

Derivata av invers funktion

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något ξ mellan x och a .

9 Integraler

Primitiva funktioner

Funktion	Primitiv funktion
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad a \neq -1$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

Partiell integration

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rotationsvolymer

$$\text{Rotation kring } x\text{-axeln: } V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$\text{Rotation kring } y\text{-axeln: } V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Båglängd

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad y = f(x)$$

10 Differentialekvationer

Första ordningens linjära differentialekvationer

Integrerande faktor till $y' + g(x)y = h(x)$ är $e^{G(x)}$, där $G(x) = \int g(x) dx$.

Andra ordningens homogena linjära differentialekvationer

Differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0,$$

där a och b är konstanter har lösningar som ges av:

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$$

om rötterna r_1 och r_2 till karakteristiska ekvationen är reella och $r_1 \neq r_2$;

$$y = (Ax + B)e^{rx}$$

om rötterna r_1 och r_2 till karakteristiska ekvationen är reella och $r_1 = r_2 = r$;

$$y = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$$

om rötterna $r_1 = \alpha + \beta i$ och $r_2 = \alpha - \beta i$ till karakteristiska ekvationen inte är reella.

11 Matematisk statistik

Beskrivande statistik

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{n} \sum f_j y_j$$
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum f_j y_j^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

Korrelationskoefficient

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Linjär regression

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$
$$a = \frac{1}{n} \sum y_i - b \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{y} - b\bar{x}$$

Intervallskattning

Observerat stickprov $x_1, x_2, \dots, x_n$ som kommer från $N(\mu, \sigma)$ och konfidensgrad $1 - \alpha$.

Känd standardavvikelse σ :

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_{\alpha/2}$$

där $\lambda_{\alpha/2}$ är sådant att $\Phi(\lambda_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Okänd standardavvikelse σ :

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$$

där $t_{\alpha/2}(n-1)$ är sådant att om $\eta \in t(n-1)$ så gäller

$$P(\eta \leq t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

och s är den skattade standardavvikelsen.

t-fördelningen

Tabellen ger det x -värde för vilket $P(\xi > x) = \alpha$, där $\xi \in t(f)$.

f	α 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Normalfördelningen

Tabellen ger sannolikheten $\Phi(x) = P(\xi \leq x)$, där $\xi \in N(0, 1)$.

För negativa x -värden använd relationen $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Normalfördelningen (forts.)

Tabellen ger det λ_α -värde för vilket $P(\xi > \lambda_\alpha) = \alpha$, där $\xi \in N(0, 1)$.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
λ_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

α	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
λ_α	3.2905	3.7190	3.8906	4.2649	4.4172	4.7534

Binomialfördelningen

Tabellen ger sannolikheten $P(\xi \leq x)$, där $\xi \in \text{Bin}(n, p)$.

För $p > 0.5$ använd $P(\xi \leq x) = P(\eta \geq n - x)$ där $\eta \in \text{Bin}(n, 1 - p)$.

n	x	p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0		0.90250	0.81000	0.72250	0.64000	0.56250	0.49000	0.42250	0.36000	0.30250	0.25000
	1		0.99750	0.99000	0.97750	0.96000	0.93750	0.91000	0.87750	0.84000	0.79750	0.75000
3	0		0.85737	0.72900	0.61412	0.51200	0.42188	0.34300	0.27463	0.21600	0.16638	0.12500
	1		0.99275	0.97200	0.93925	0.89600	0.84375	0.78400	0.71825	0.64800	0.57475	0.50000
	2		0.99987	0.99900	0.99662	0.99200	0.98438	0.97300	0.95713	0.93600	0.90887	0.87500
4	0		0.81451	0.65610	0.52201	0.40960	0.31641	0.24010	0.17851	0.12960	0.09151	0.06250
	1		0.98598	0.94770	0.89048	0.81920	0.73828	0.65170	0.56298	0.47520	0.39098	0.31250
	2		0.99952	0.99630	0.98802	0.97280	0.94922	0.91630	0.87352	0.82080	0.75852	0.68750
	3		0.99999	0.99990	0.99949	0.99840	0.99609	0.99190	0.98499	0.97440	0.95899	0.93750
5	0		0.77378	0.59049	0.44371	0.32768	0.23730	0.16807	0.11603	0.07776	0.05033	0.03125
	1		0.97741	0.91854	0.83521	0.73728	0.63281	0.52822	0.42841	0.33696	0.25622	0.18750
	2		0.99884	0.99144	0.97339	0.94208	0.89648	0.83692	0.76483	0.68256	0.59313	0.50000
	3		0.99997	0.99954	0.99777	0.99328	0.98438	0.96922	0.94598	0.91296	0.86878	0.81250
	4		1.00000	0.99999	0.99992	0.99968	0.99902	0.99757	0.99475	0.98976	0.98155	0.96875
6	0		0.73509	0.53144	0.37715	0.26214	0.17798	0.11765	0.07542	0.04666	0.02768	0.01562
	1		0.96723	0.88574	0.77648	0.65536	0.53394	0.42017	0.31908	0.23328	0.16357	0.10937
	2		0.99777	0.98415	0.95266	0.90112	0.83057	0.74431	0.64709	0.54432	0.44152	0.34375
	3		0.99991	0.99873	0.99411	0.98304	0.96240	0.92953	0.88258	0.82080	0.74474	0.65625
	4		1.00000	0.99994	0.99960	0.99840	0.99536	0.98906	0.97768	0.95904	0.93080	0.89062
	5		1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99976	0.99927	0.99816	0.99590	0.99170	0.98438
7	0		0.69834	0.47830	0.32058	0.20972	0.13348	0.08235	0.04902	0.02799	0.01522	0.00781
	1		0.95562	0.85031	0.71658	0.57672	0.44495	0.32942	0.23380	0.15863	0.10242	0.06250
	2		0.99624	0.97431	0.92623	0.85197	0.75641	0.64707	0.53228	0.41990	0.31644	0.22656
	3		0.99981	0.99727	0.98790	0.96666	0.92944	0.87396	0.80015	0.71021	0.60829	0.50000
	4		0.99999	0.99982	0.99878	0.99533	0.98712	0.97120	0.94439	0.90374	0.84707	0.77344
	5		1.00000	0.99999	0.99993	0.99963	0.99866	0.99621	0.99099	0.98116	0.96429	0.93750
	6		1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99978	0.99936	0.99836	0.99626	0.99219

n	x	p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
8	0	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777	0.10011	0.05765	0.03186	0.01680	0.00837	0.00391	
	1	0.94276	0.81310	0.65718	0.50332	0.36708	0.25530	0.16913	0.10638	0.06318	0.03516	
	2	0.99421	0.96191	0.89479	0.79692	0.67854	0.55177	0.42781	0.31539	0.22013	0.14453	
	3	0.99963	0.99498	0.97865	0.94372	0.88618	0.80590	0.70640	0.59409	0.47696	0.36328	
	4	0.99998	0.99957	0.99715	0.98959	0.97270	0.94203	0.89391	0.82633	0.73962	0.63672	
	5	1.00000	0.99998	0.99976	0.99877	0.99577	0.98871	0.97468	0.95019	0.91154	0.85547	
	6	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99962	0.99871	0.99643	0.99148	0.98188	0.96484	
	7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99977	0.99934	0.99832	0.99609	
9	0	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422	0.07508	0.04035	0.02071	0.01008	0.00461	0.00195	
	1	0.92879	0.77484	0.59948	0.43621	0.30034	0.19600	0.12109	0.07054	0.03852	0.01953	
	2	0.99164	0.94703	0.85915	0.73820	0.60068	0.46283	0.33727	0.23179	0.14950	0.08984	
	3	0.99936	0.99167	0.96607	0.91436	0.83427	0.72966	0.60889	0.48261	0.36138	0.25391	
	4	0.99997	0.99911	0.99437	0.98042	0.95107	0.90119	0.82828	0.73343	0.62142	0.50000	
	5	1.00000	0.99994	0.99937	0.99693	0.99001	0.97471	0.94641	0.90065	0.83418	0.74609	
	6	1.00000	1.00000	0.99995	0.99969	0.99866	0.99571	0.98882	0.97497	0.95023	0.91016	
	7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99989	0.99957	0.99860	0.99620	0.99092	0.98047	
10	0	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737	0.05631	0.02825	0.01346	0.00605	0.00253	0.00098	
	1	0.91386	0.73610	0.54430	0.37581	0.24403	0.14931	0.08595	0.04636	0.02326	0.01074	
	2	0.98850	0.92981	0.82020	0.67780	0.52559	0.38278	0.26161	0.16729	0.09956	0.05469	
	3	0.99897	0.98720	0.95003	0.87913	0.77588	0.64961	0.51383	0.38228	0.26604	0.17188	
	4	0.99994	0.99837	0.99013	0.96721	0.92187	0.84973	0.75150	0.63310	0.50440	0.37695	
	5	1.00000	0.99985	0.99862	0.99363	0.98027	0.95265	0.90507	0.83376	0.73844	0.62305	
	6	1.00000	0.99999	0.99987	0.99914	0.99649	0.98941	0.97398	0.94524	0.89801	0.82812	
	7	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99958	0.99841	0.99518	0.98771	0.97261	0.94531	
11	0	0.56880	0.31381	0.16734	0.08590	0.04224	0.01977	0.00875	0.00363	0.00139	0.00049	
	1	0.89811	0.69736	0.49219	0.32212	0.19710	0.11299	0.06058	0.03023	0.01393	0.00586	
	2	0.98476	0.91044	0.77881	0.61740	0.45520	0.31274	0.20013	0.11892	0.06522	0.03271	
	3	0.99845	0.98147	0.93056	0.83886	0.71330	0.56956	0.42555	0.29628	0.19112	0.11328	
	4	0.99989	0.99725	0.98411	0.94959	0.88537	0.78970	0.66831	0.53277	0.39714	0.27441	
	5	0.99999	0.99970	0.99734	0.98835	0.96567	0.92178	0.85132	0.75350	0.63312	0.50000	
	6	1.00000	0.99998	0.99968	0.99803	0.99244	0.97838	0.94986	0.90065	0.82620	0.72559	
	7	1.00000	1.00000	0.99997	0.99976	0.99881	0.99571	0.98776	0.97072	0.93904	0.88672	
10	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99942	0.99796	0.99408	0.98520	0.96729	
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99979	0.99927	0.99779	0.99414	
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99985	0.99951	

n	x	p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
12	0	0.54036	0.28243	0.14224	0.06872	0.03168	0.01384	0.00569	0.00218	0.00077	0.00024	
	1	0.88164	0.65900	0.44346	0.27488	0.15838	0.08503	0.04244	0.01959	0.00829	0.00317	
	2	0.98043	0.88913	0.73582	0.55835	0.39068	0.25282	0.15129	0.08344	0.04214	0.01929	
	3	0.99776	0.97436	0.90779	0.79457	0.64878	0.49252	0.34665	0.22534	0.13447	0.07300	
	4	0.99982	0.99567	0.97608	0.92744	0.84236	0.72366	0.58335	0.43818	0.30443	0.19385	
	5	0.99999	0.99946	0.99536	0.98059	0.94560	0.88215	0.78726	0.66521	0.52693	0.38721	
	6	1.00000	0.99995	0.99933	0.99610	0.98575	0.96140	0.91537	0.84179	0.73931	0.61279	
	7	1.00000	1.00000	0.99993	0.99942	0.99722	0.99051	0.97449	0.94269	0.88826	0.80615	
	8	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99961	0.99831	0.99439	0.98473	0.96443	0.92700	
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99979	0.99915	0.99719	0.99212	0.98071	
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99992	0.99968	0.99892	0.99683	
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99976	
13	0	0.51334	0.25419	0.12091	0.05498	0.02376	0.00969	0.00370	0.00131	0.00042	0.00012	
	1	0.86458	0.62134	0.39828	0.23365	0.12671	0.06367	0.02958	0.01263	0.00490	0.00171	
	2	0.97549	0.86612	0.69196	0.50165	0.33260	0.20248	0.11319	0.05790	0.02691	0.01123	
	3	0.99690	0.96584	0.88200	0.74732	0.58425	0.42061	0.27827	0.16858	0.09292	0.04614	
	4	0.99971	0.99354	0.96584	0.90087	0.79396	0.65431	0.50050	0.35304	0.22795	0.13342	
	5	0.99998	0.99908	0.99247	0.96996	0.91979	0.83460	0.71589	0.57440	0.42681	0.29053	
	6	1.00000	0.99990	0.99873	0.99300	0.97571	0.93762	0.87053	0.77116	0.64374	0.50000	
	7	1.00000	0.99999	0.99984	0.99875	0.99435	0.98178	0.95380	0.90233	0.82123	0.70947	
	8	1.00000	1.00000	0.99998	0.99983	0.99901	0.99597	0.98743	0.96792	0.93015	0.86658	
	9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99935	0.99749	0.99221	0.97966	0.95386	
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99993	0.99965	0.99868	0.99586	0.98877	
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99986	0.99948	0.99829	
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99988	