

## Block 1 - Mängder och tal

- Mängder
  - Mängder och element
  - Venndiagram
- Talmängder
  - Heltalen  $\mathbb{Z}$
  - Rationella talen  $\mathbb{Q}$
  - Reella talen  $\mathbb{R}$
  - Räkning med tal.
- Ordning av talen i  $\mathbb{R}$ 
  - Intervall
  - Absolutbelopp
  - Olikheter

## Preparandkurs i matematik

Låt oss börja från början:

Gud skapade de positiva heltalen.

Allt annat är människans verk.

(Leopold Kronecker)

De positiva heltalen är ett exempel på en struktur som kallas för en **mängd**.

## Mängder

En mängd är en samling av objekt som är sådan att man för varje tänkbart element otvetydigt kan avgöra om det tillhör mängden eller ej. Objekten kallas för mängdens **element**.

En mängd är **utan ordning** och upprepade element bortser man ifrån.

Två mängder är lika om de innehåller exakt samma element.

## Exempel

- Låt  $A$  vara mängden av alla positiva heltal mindre än 6, dvs.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

- Mängden  $\{1, 3, 5, 5\}$  är lika med mängden  $\{1, 3, 5\}$ .
- Mängden  $\{1, 3, 5\}$  är lika med mängden  $\{3, 5, 1\}$ .

För att tala om att ett element tillhör en mängd använder man tecknet  $\in$ , t.ex om det står

$$2 \in A,$$

utläses detta att “2 är ett element som tillhör mängden  $A$ ”.

Vi har också ett motsvarande tecken för “tillhör inte”:

$$7 \notin A.$$

## Venndiagram för mängder

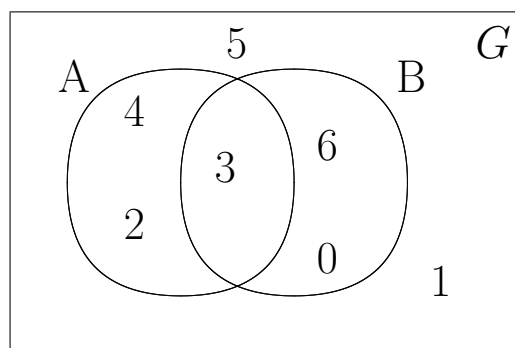
Venndiagram är illustrationer som hjälper oss att åskådliggöra mängder och samband mellan mängder.

Alla mängder i en uppgift har oftast element av samma typ. Om t.ex alla element är positiva heltal då säger vi att vi jobbar i **grundmängden**  $\mathbb{Z}_+$ .

I ett Venndiagram ritar vi grundmängden som en stor rektangel, och de mängder vi arbetar med anges som slutna områden (t.ex cirklar eller ellipser) inuti rektangeln.

### Exempel

Låt  $G$  vara grundmängden  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  och betrakta de två mängderna  $A = \{2, 3, 4\}$  och  $B = \{0, 3, 6\}$ . Ett Venndiagram för dessa blir då:



## Några ofta förekommande grundmängder

Mängden av **positiva heltal** är

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Notera att 0 *inte* är ett positivt heltal.

Mängden av de positiva heltalen *och* 0 är de **naturliga talen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Mängden av **negativa heltal** är

$$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}.$$

Notera att 0 *inte* är ett negativt heltal.

Mängden av alla **heltal** kallas för  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-.$$

## Talmängder

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Nu till (en del av) människans verk:

$$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}.$$

Heltalen

$$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

De rationella talen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : b, a \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \dots \right\}.$$

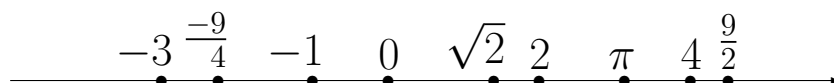
Räkneoperationer på  $\mathbb{Z}$ :  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  och heltalsdivision med rest

Räkneoperationer på  $\mathbb{Q}$ :  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $\div$  (men *inte* division med 0)

## Reella talen $\mathbb{R}$

Det är inte helt så enkelt att definiera de reella talen. Det enklaste sättet att beskriva  $\mathbb{R}$  är som **mängden av alla tal som är längder av linjestycker**.

Vi använder en tallinje till att illustrera  $\mathbb{R}$ :

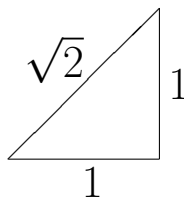


- negativa reella tal ges m.h.a linjestycker till vänster om 0
- positiva reella tal ges m.h.a linjestycker till höger om 0

Notera att heltal och rationella tal är längder av linjestycker på tallinjen, så  $\mathbb{Z}$  och  $\mathbb{Q}$  är delmängder av  $\mathbb{R}$ .

Fråga: Finns det tal i  $\mathbb{R}$  som inte är rationella?

Svar: Ja, det finns **irrationella tal**, dvs. tal som inte kan skrivas som en kvot av heltal, t.ex.  $\sqrt{2}$ :



I algebrakursen kommer vi att bevisa att  $\sqrt{2}$  är irrationellt.

## Decimaltal

Rationella tal och reella tal kan alltid skrivas som decimaltal, om man tillåter oändliga strängar av siffror efter decimalkommat. Vårt talsystem är det så kallade 10-systemet som använder positions-siffror från mängden  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

## Exempel

- Decimaltalet 3472.459 beskriver talet

$$3(10^3) + 4(10^2) + 7(10^1) + 2(10^0) + 4(10^{-1}) + 5(10^{-2}) + 9(10^{-3})$$

- Rationella talet  $\frac{1}{3}$  ges av den oändliga strängen

$$0.333333333....$$

## Decimaltal

### Exempel

- Alla ändliga decimaltal är rationella, t.ex. 0.123
- Alla oändliga periodiska decimaltal är rationella, t.ex. 0.123123123123...
- Omvänt är alla rationella tal också antingen ändliga eller oändliga periodiska decimaltal.
- Vi kan sammanfatta att ett **irrationellt tal** är ett oändligt, **icke-periodiskt decimaltal**.

## Räkning med reella tal

Räkneoperationerna på  $\mathbb{R}$  är  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $\div$  (men *inte* division med 0) med vanliga räkneregler, t.ex: Låt  $a, b$  och  $c$  vara reella:

**Associativa lagar:**  $a(bc) = (ab)c$  och  $a + (b + c) = (a + b) + c$

**Kommutativa lagar:**  $ab = ba$  och  $a + b = b + a$

**Distributiva lagar:**  $a(b + c) = ab + ac$

**Lagen om noll-delare:**

Om  $ab = 0$  då är  $a = 0$  eller  $b = 0$  (eller både)

**Teckenregler:**

$$\begin{aligned} a + (-b) &= a - b, & a - (-b) &= a + b, \\ (-a)b &= a(-b) = -ab, & (-a)(-b) &= ab \end{aligned}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \text{ om } b \neq 0.$$

Uttryck beräknas **från vänster till höger** med **PaPoDMAS**-regeln:

**P**arenteser (inre först)

**P**otenser (inre först)

**D**ivision/ **M**ultiplikation

**A**ddition/ **S**ubtraktion

## Räkning med reella tal

### Exempel

Beräkna

$$2 + 3 \cdot 5$$

$$-10 + (-5)$$

$$-10 - (-5)$$

$$(-10)(-5)$$

$$(-10) - 5$$

$$10(-5)$$

$$3 - (4 - 7)$$

$$3 - 4 - 7$$

$$(3 - 4)(-7)$$

$$(-2)(-3)(-4)$$

$$(-2)(-3) - 5(-4)$$

$$\frac{6}{0.2 - 0.2(-2)}$$

## Bråkräkning

**T**äljaren står på **T**aket,  
**N**ämnaren **N**ederst.

## Addition och subtraktion

Förläng så att alla bråk i uttrycket har samma nämnare.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$$

## Multiplikation

Multiplitera täljare för sig och nämnare för sig.  
(Tips: Förkorta först om det går)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{14}{21} \cdot \frac{27}{36}$$

## Division

Är det samma som att multiplicera med inverterade bråket, t.ex

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$$

## Bråkräkning

### Exempel

Förkorta så långt som möjligt

$$\frac{35}{84}$$

och

$$\frac{0.35}{0.0084}$$

Beräkna  $3 + \frac{1}{7} - \frac{12}{14} - \frac{1}{2}$

## Bråkräkning

### Exempel

Beräkna  $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$

Beräkna  $\frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4}}$

Vilket av talen är störst,  $-\frac{3}{17}$  eller  $-\frac{4}{23}$ ?

## Ordning av talen i $\mathbb{R}$

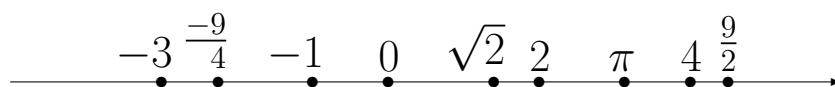
Talen i mängden  $\mathbb{R}$  är ordnade på ett naturligt sätt:

$x < y$  betyder att  $x$  ligger vänster om  $y$  på reella tallinjen

$x > y$  betyder att  $x$  ligger höger om  $y$  på reella tallinjen

$x \leq y$  betyder att  $x < y$  eller  $x = y$

$x \geq y$  betyder att  $x > y$  eller  $x = y$



### Exempel

$$-2.25 < 4$$

$$\sqrt{2} > 0$$

$$\sqrt{2} < 2$$

$$2 \leq 2$$

## Egenskaper för ordningsrelationer

För alla reella tal  $a, b$  och  $c$  gäller

- Om  $a < b$  då är  $a \pm c < b \pm c$
- Om  $a < b$  och  $c > 0$  då är  $ac < bc$
- Om  $a < b$  och  $c < 0$  då är  $ac > bc$
- Om  $0 < a < b$  då är  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Liknande regler gäller för  $\leq$  och  $\geq$ .

### Exempel

$2 < 3$  ger t.ex att

- $12 < 13$ ,
- $-8 < -7$ ,
- $20 < 30$ ,
- $-20 > -30$ ,
- $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ .

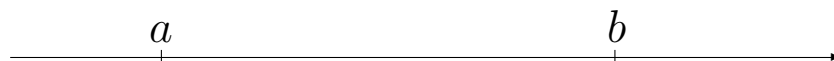
## Några delmängder till $\mathbb{R}$

### Intervall

Ett intervall är en delmängd av reella talen som innehåller alla tal på ett linjestycke på reella tallinjen. Det finns 3 typer av ändliga intervall:

#### Slutet intervall

$[a, b]$  är alla reella tal  $x$  med  $a \leq x \leq b$



#### Öppet intervall

$]a, b[$  och  $(a, b)$  är alla reella tal  $x$  med  $a < x < b$



#### Halvöppet intervall

$]a, b]$  och  $(a, b]$  är alla reella tal  $x$  med  $a < x \leq b$



$[a, b[$  och  $[a, b)$  är alla reella tal  $x$  med  $a \leq x < b$



## Några delmängder till $\mathbb{R}$

### Intervall

Det finns också oändliga intervall:

$[a, \infty[$  **och**  $[a, \infty)$  är alla reella tal  $x$  med  $x \geq a$



$]a, \infty[$  **och**  $(a, \infty)$  är alla reella tal  $x$  med  $x > a$



$] - \infty, a]$  **och**  $(-\infty, a]$  är alla reella tal  $x$  med  $x \leq a$



$] - \infty, a[$  **och**  $(-\infty, a)$  är alla reella tal  $x$  med  $x < a$



Observera att  $\infty$  *inte* är ett tal utan en symbol som anger att intervallet är utan ändpunkt. Man kan alltså inte räkna med  $\infty$ !

Notera också att  $] - \infty, \infty[$  och  $(-\infty, \infty)$  är hela  $\mathbb{R}$ .

## Absolutbelopp

För alla reella tal  $x$  betecknas (absolut)beloppet av  $x$  med  $|x|$  och det definieras genom

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

## Exempel

- $|2| = 2$
- $|-2| = 2$
- $|0| = 0$
- $|-0.45| = 0.45$

Att ta absolutbeloppet av  $x$  betyder därför att stryka ett eventuellt minustecken framför talet. Men akta dig om  $x$  är en obekant:

Fråga: Är  $|-a| = a$  för alla reella tal  $a$ ?

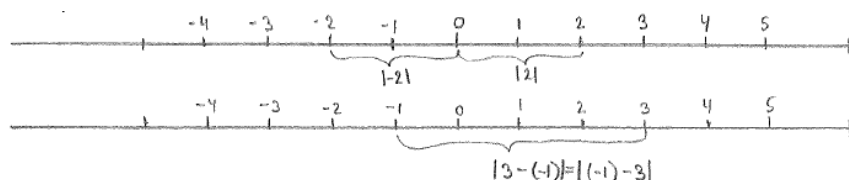
Svar: Nej, t.ex.  $| - (-2) | = 2$ .

Notera också här att  $\sqrt{x^2} = |x|$ , INTE  $x$ .

## Geometrisk tolkning av absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

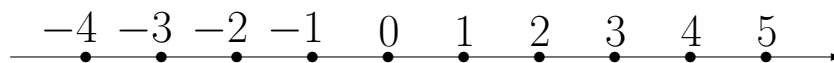
$|x|$  kan tolkas som avståndet mellan  $x$  och 0 på reella tallinjen, och  $|x - a|$  som avståndet mellan  $x$  och  $a$ .



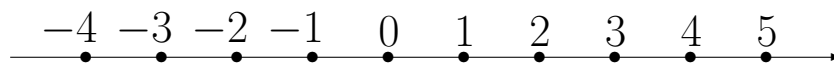
### Exempel

Bestäm alla  $x$  som uppfyller att

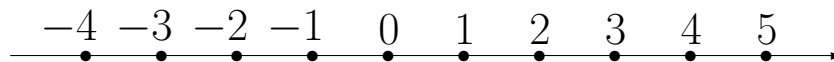
- $|x| = 3$



- $|x - 1| \leq 3$



- $1 < |x - 1| \leq 3$



## Olikheter

### Egenskaper för olikheter

Kom ihåg att för alla reella tal  $a, b$  och  $c$  gäller

- Om  $a < b$  då är  $a \pm c < b \pm c$
- Om  $a < b$  och  $c > 0$  då är  $ac < bc$
- Om  $a < b$  och  $c < 0$  då är  $ac > bc$
- Om  $0 < a < b$  då är  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

### Exempel

Lös olikheterna

- $2x + 5 < -7$

- $5 - 2x < 7$

## Olikheter med absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Kom ihåg att  $|x|$  kan tolkas som avståndet mellan  $x$  och 0 på reella tallinjen, och  $|x - a|$  som avståndet mellan  $x$  och  $a$ . Reella tal  $x$  som uppfyller olikheten

$$|x - a| \leq b$$

är alltså alla tal som har avstånd  $\leq b$  till talet  $a$  på reella tallinjen. Några olikheter med absolutbelopp är då enkla att lösa:

### Exempel

Bestäm alla  $x$  som uppfyller att

- $|x - 2| \leq 3$

- $|2x - 4| < 1$