

Block 3 - Ekvationer

- Andragradsekvationer
 - Kvadratkomplettering
 - Faktorsatsen
 - pq -formeln
 - Grafen för ett andragradspolynom
- Rotekvationer
- Olikheter
 - Andragradsuttryck
 - Rationella uttryck
 - Lösning m.h.a. teckenschema
- Räta linjens ekvation
- Cirkelns ekvation
- Ellipsens ekvation

Andragradsekvationer

pq -formeln fås m.h.a. **kvadratkomplettering**:

Exempel

Lös ekvationerna nedan med kvadratkomplettering.

- $x^2 + 2x - 3 = 0$
- $x^2 + 7x + 12 = 0$
- $x^2 - 9x + 22 = 0$
- $4x^2 - 4x - 11 = 0$
- $x^2 - 3 = 0$
- $x^2 + 3 = 0$

Andragradsekvationer

Faktorsatsen

Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har lösningarna $x = r_1$ och $x = r_2$ om och endast om

$$x^2 + px + q = (x - r_1)(x - r_2),$$

dvs. om och endast om $q = r_1 r_2$ och $p = -(r_1 + r_2)$.

Exempel

Faktorisera uttrycken och lös då ekvationerna

- $x^2 + 2x - 3 = 0$
- $x^2 + 7x + 12 = 0$
- $x^2 - x - 12 = 0$
- $x^2 - 8x + 12 = 0$

Andragradsekvationer

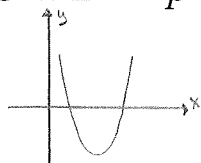
pq -formeln

Varje andragradsekvation med reella koefficienter kan skrivas på formen

$$x^2 + px + q = 0$$

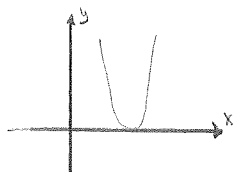
där p och q är reella konstanter.

Om $D = p^2 - 4q > 0$ så har ekvationen två reella rötter



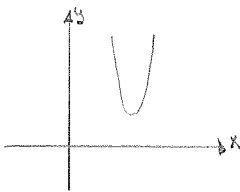
$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Om $D = p^2 - 4q = 0$ så har ekvationen en (reel) dubbelrot



$$x = \frac{-p}{2}$$

Om $D = p^2 - 4q < 0$ så har ekvationen inga reella rötter.



Andragradsekvationer

Exempel

Lös med pq -formeln

- $x^2 - 3x - 10 = 0$

- $2x^2 - 3x + 1 = 0$

- $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

- $(x + \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{x} = x + 12$

Rotekvationer

(Kvadrat)**roten** ur a definieras endast för reella tal $a \geq 0$. $\sqrt{a}$ är det icke-negativa tal vars kvadrat är lika med a .

Exempel

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{0} = 0$$

$\sqrt{-4}$ är inte definierat!

En **rotekvation** är en ekvation där den obekanta finns under rottecken. Rrotekvationer lösas genom att kvadrera båda leden en eller flera gånger.

Observera att denna metod kan ge ekvationer med fler lösningar (så kallade falska rötter) än den ursprungliga ekvationen, så man måste alltid kolla om lösningen man hittar verkligen löser ekvationen.

Rotekvationer

Exempel

Lös ekvationen

$$\sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{2x-8}.$$

Kvadrerar man båda sidor får man

$$x-3 = 1 - 2\sqrt{2x-8} + 2x-8$$

som skrivs om till

$$x-4 = 2\sqrt{2x-8},$$

som kvadreras till

$$(x-4)^2 = 4(2x-8),$$

skrivs om till

$$x^2 - 8x + 16 = 8x - 32$$

och igen till

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

och igen till

$$(x-4)(x-12) = 0$$

så $x = 4$ eller $x = 12$. Men om vi kollar får vi att $x = 12$ är en falsk rot eftersom

$$\sqrt{12-3} = 3 \neq -3 = 1 - \sqrt{24-8}.$$

Ursprungliga ekvationen har då endast lösningen $x = 4$.

Rotekvationer

Exempel

Lös ekvationerna

- $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - 9}$
- $3\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x + 1} = 2$
- $\sqrt{6x + 1} - \sqrt{2x + 1} + 2 = 0.$

Mer om olikheter

Olikheter med produkt eller kvoter av polynom löser man m.h.a ett teckenschema eftersom produkten av två faktorer är positiv precis då båda faktorer har samma tecken:

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

Exempel

Lös olikheten $(x - 1)(x + 5) > 0$.

		-5		1	
		•		•	
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x + 5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Så lösningen är

$$x < -5 \text{ eller } x > 1.$$

Mer om olikheter

Exempel

Lös olikheten $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.

Hitta rötterna, faktorisera VL

$$(x + 1)(x - 5) \leq 0,$$

och gör då ett teckenschema:

		-1		5	
		•		•	
$x - 5$	—	—	—	0	+
$x + 1$	—	0	+	+	+
$(x + 1)(x - 5)$	+	0	—	0	+

Så lösningen är

$$-1 \leq x \leq 5$$

Mer om olikheter

Exempel

Lös olikheterna

- $\frac{(2x+1)(x-3)}{(x+5)} \geq 0$

- $x^2 + 2x > 18x$

- $\frac{1}{x} < 2x - 1$

- $-1 \leq \frac{2x^2}{x-1} \leq 9$

(Lös de två olikheter separat och hitta snittet av lösningerna)

- $-x^2 - 4 > 0$

- $x^2 + 4 > 0$

Räta linjens ekvation

En rät linje som inte är parallel med y -axeln har en ekvation av form

$$y = kx + m$$

där riktningskoefficienten k anger lutningen och linjen skär y -axeln i punkten $(0, m)$.

Rita linjen genom att hitta två punkter på den m.h.a

- att sätta in två x -värden i ekvationen

eller

- ta punkten $(0, m)$ som första punkten och hitta andra punkten vid att gå 1 “steg” mot höger och $|k|$ steg upp eller ned om k är positiv resp. negativ.

Räta linjer

Exempel

Rita linjerna

- $y = 3x - 5$
- $y = -2x + 3$
- $2x + 3y = 6$
- $y = 2$
- $x = 4$

Hitta en ekvation för den räta linjen genom punkterna $(1, 4)$ och $(4, -2)$

Bestäm skärningen mellan linjerna.

- $y = 1 + x$ och $y = -2 - x$
- $3x + 6y = 3$ och $2x + 4y = 0$

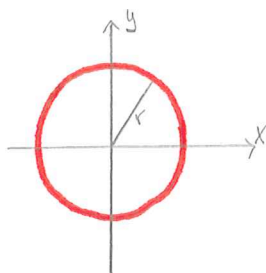
Cirkelns ekvation

En cirkel är en kurva som består av alla punkter (x, y) i planet som har samma avstånd r till en given **medelpunkt** (x_0, y_0) .

r är cirkelns **radie**.

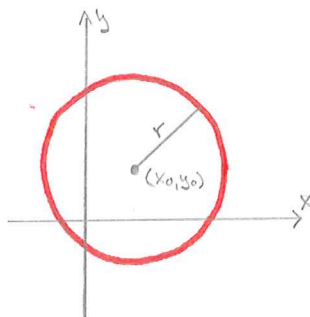
- En cirkel med medelpunkten $(0, 0)$ och radien r har ekvationen

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



- En cirkel med medelpunkten (x_0, y_0) och radien r har ekvationen

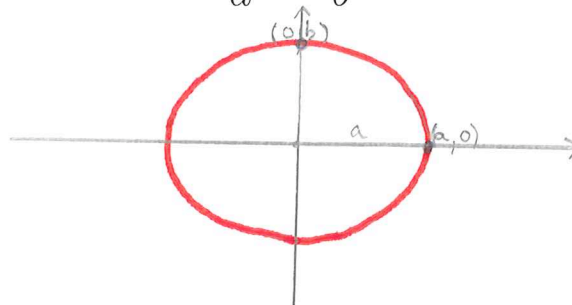
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



Ellipser och hyperbler

- En ellips med medelpunkt i $(0, 0)$ och halvaxlarna a och b har ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Om $a = b$ är ellipsen en cirkel med radie r .

- En ekvation av formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beskriver en hyperbel med asymptoter $y = \frac{b}{a}x$ och $y = -\frac{b}{a}x$.

