

Block 4 - Funktioner

- Funktionsbegreppet
 - Definitionsmängd
 - Värdemängd
 - Grafen för en funktion
- Polynom
 - Konstanta polynom
 - Linjära polynom
 - Andragradspolynom
- Potenser, exponential- och logaritmfunktioner
 - Potensfunktioner
 - Exponentialfunktioner
 - Logaritmfunktioner
- Trigonometriska funktioner
 - $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$
 - Grader och radianer
 - Grundläggande trigonometriska ekvationer
- Triangler
 - Rätvinkliga trianglar
 - Grader och radianer
 - Trigonometriska identiteter
 - Trigonometriska ekvationer

Funktioner

Låt X och Y vara två icke-tomma mängder.

En **funktion** från X till Y ,

$$f : X \rightarrow Y,$$

är en regel som till varje $x \in X$ tillordnar ett **unik** värde $y \in Y$ som kallas bilden av x under f och betecknas $f(x)$, dvs.

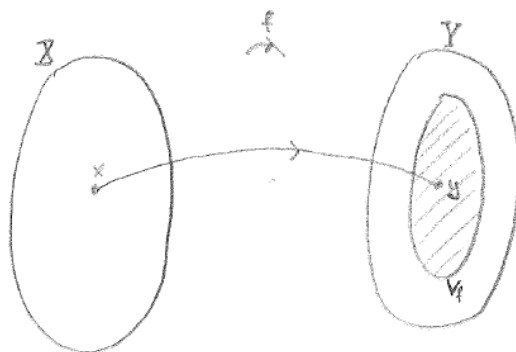
$$y = f(x).$$

Mängden X kallas funktionens **definitionsområde** och betecknas vanligen med D_f .

Mängden Y kallas funktionens **bildområde** eller **målbild**.

Mängden av de element i Y som **ant**as av funktionen f kallas funktionens **värdeområde** och betecknas vanligen med V_f .

$$V_f = \{f(x) \in Y : x \in X\}$$



Funktioner

Exempel

Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2$$

Funktionens definitionsmängd är $\mathbb{R}$.

Funktionens bildmängd är $\mathbb{R}$.

Funktionsregeln är $y = x^2$ (eller $f(x) = x^2$)

Kom ihåg att om X och Y är delmängder av $\mathbb{R}$, är **graf**en för en funktion $f : X \rightarrow Y$ de punkter (x, y) i reella talplanet som bestäms av $y = f(x)$.

Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där $f(x) = x^2$ har grafen



Funktionen antar endast icke-negativa y -värden, så värdemängden $V_f = [0, \infty[$.

Styckvis definierade funktioner

En styckvis definierad funktion är en funktion som är definierad på olika sätt i olika intervall.

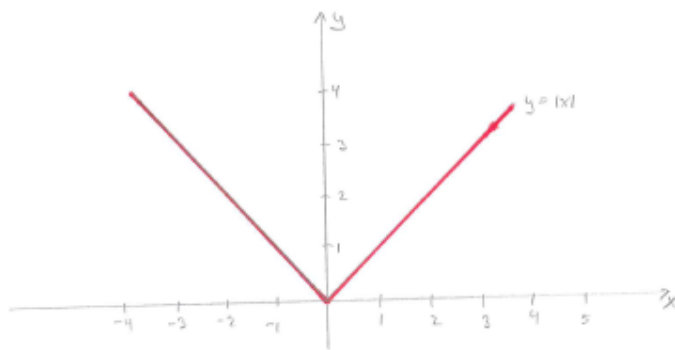
Exempel

Beloppfunktionen $| \cdot | : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0; \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Funktionens definitionsmängd är hela $\mathbb{R}$, men den definieras på olika sätt i intervallen $] -\infty, 0[$ och $[0, \infty[$.

Beloppfunktionens värdemängd är alla icke-negativa reella tal, dvs. intervallet $[0, \infty[$, och grafen för funktionen är



Styckvis definierade funktioner

Exempel

Rita grafen till funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{om } x < 1; \\ 1 - 2x & \text{om } 1 \leq x \leq 2; \\ x & \text{om } x > 2. \end{cases}$$

Definitionsmängder och värdemängder

Exempel

Bestäm största möjliga definitionsmängden till reella funktionerna med funktionsregeln

$$f(x) = \sqrt{x-3}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Ange värdemängden till reella funktionerna

$$F(x) = \sqrt{x-3}, x \geq 5, x \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = 3x - 1, -2 \leq x \leq 0, x \in \mathbb{R}$$

Några elementära funktioner

Ett **polynom** av grad n är en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ av typen

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

där n är ett icke-negativt heltal, koefficienterna a_i är reella tal och $a_n \neq 0$.

Exempel

$$f(x) = 2 \text{ (ett konstant polynom)}$$

$$f(x) = 3x + 2 \text{ (ett linjärt polynom)}$$

$$f(x) = x^2 - x + 6 \text{ (ett andragradspolynom)}$$

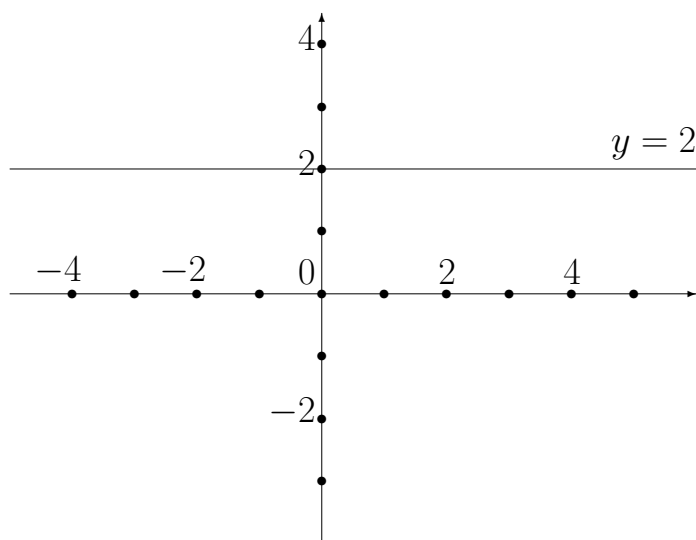
$$f(x) = x^3 + 6x - 7 \text{ (ett tredjegradspolynom)}$$

Konstanta polynomfunktioner

Grafen för en konstant polynomfunktion är en vågrät linje.

Exempel

$f(x) = 2$ har grafen

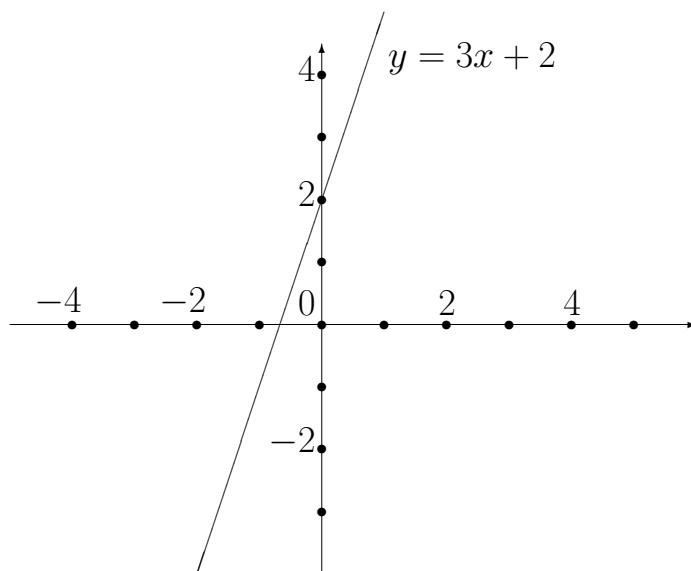


Linjära polynomfunktioner

Grafen för ett linjärt polynom $f(x) = ax + b$ är en linje med lutning a som skär y -axeln i punkten $(0, b)$.

Exempel

$f(x) = 3x + 2$ har grafen



Andragradspolynom

Grafen för ett andragradspolynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ är en **parabel**.

Parabeln skär y -axeln i punkten $(0, c)$.

Om parabeln skär/rör x -axeln, då är det i punkterna $(r_1, 0)$ och $(r_2, 0)$ där r_1 och r_2 är rötter i ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Om ekvationen inte har några rötter, då skär parabeln inte x -axeln.

Parabeln har vertex där $f'(x) = 0$, dvs där $2ax + b = 0$.

Om $a > 0$ är parabelns vertex en minimumpunkt eftersom parabeln är av typ



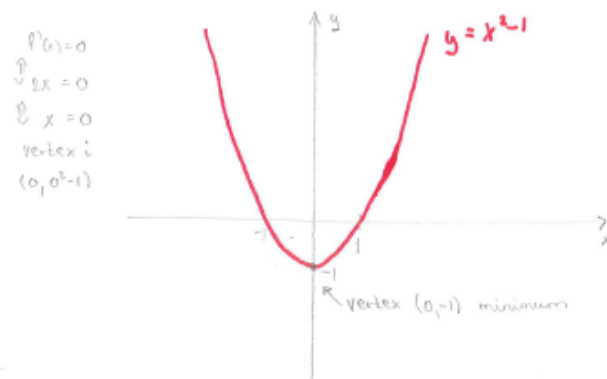
Om $a < 0$ är parabelns vertex en maximumpunkt eftersom parabeln är av typ



Andragradspolynom

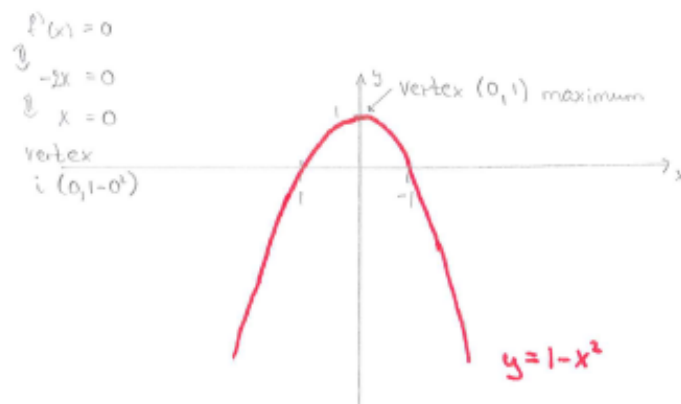
Exempel

$f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ har grafen



Exempel

Medan $f(x) = 1 - x^2 = -(x - 1)(x + 1)$ har grafen



Potensfunktioner

En potensfunktion har en funktionsregel av typen

$$f(x) = x^r$$

där $r \in \mathbb{R}$. Definitionsmängden är minst $\mathbb{R}_+$ men kan vara större för vissa värden på exponenten r . För icke-negativa heltalsvärden på r definieras x^r rekursivt genom att

$$x^0 = 1 \text{ och } x^r = x \cdot x^{r-1} \text{ för } r \geq 1.$$

Låt n vara ett positivt heltal, negativa heltalspotenser definieras då som

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Begreppet utvidgas till alla rationella exponenter m.h.a n :te rötterna

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},$$

där $\sqrt[n]{x}$ är rotfunktionen med index n , som definieras

- för $x \geq 0$ som det tal ≥ 0 som upphöjt till n är lika med x ;
- för $x < 0$, n udda
som det tal < 0 som upphöjt till n är lika med x ;
- för $x < 0$, n jämnt
är det odefinierad.

Det går att utvidga begreppet potensfunktion till alla reella exponenter så att de vanliga räkneregler för potenser gäller:

Potenslagar

$a^0 = 1$ för alla $a \in \mathbb{R}$, även $0^0 = 1$.

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$a^p b^p = (ab)^p$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Potenslagar

Exempel

Beräkna

$$4^{1/2}$$

$$1000^{\frac{1}{3}}$$

$$(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$$

$$4^{-1/2}$$

$$16^{\frac{3}{4}}$$

$$27^{-\frac{2}{3}}$$

Potenslagar

Exempel

Skriv som en potens av a

$$\sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[5]{a^4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[7]{a^5}}\right)^2$$

Potenslagar

Exempel

Beräkna

$$0^0 + 1^0 + 2^0 + \dots + 10^0$$

$$2 \cdot 2^x$$

$$\frac{2^{x-1}}{2^x}$$

$$(2^2)^3$$

$$2^{2^3}$$

$$2^2 \cdot 2^3$$

$$3^2 \cdot 4^2$$

Potensfunktioner

Kvadratrotsfunktionen

Kom ihåg att (kvadrat)**roten** ur a endast definieras för reella tal $a \geq 0$. $\sqrt{a}$ är det icke-negativa tal vars kvadrat är lika med a .

Exempel

$$\sqrt{4} = 2$$

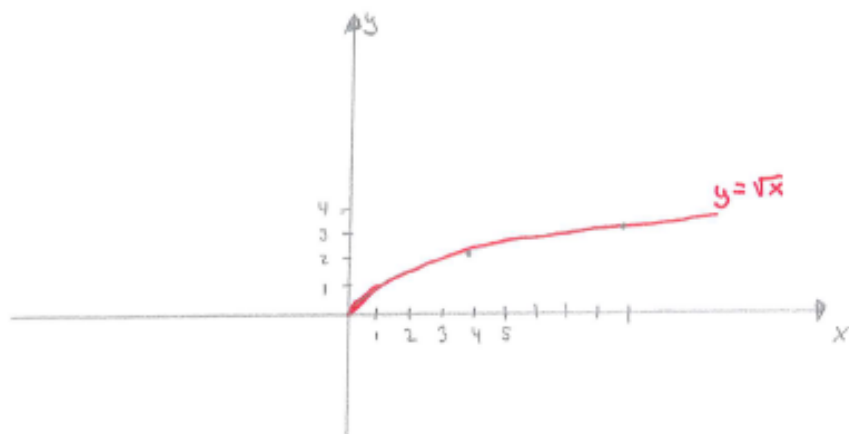
$$\sqrt{0} = 0$$

$\sqrt{-4}$ är inte definierat!

Kvadratrotsfunktionen är alltså potensfunktionen

$$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

med alla icke-negativa reella tal som definitionsmängd och grafen



Exponentialfunktioner

En exponentialfunktion med bas a är en funktion av typen

$$f(x) = a^x$$

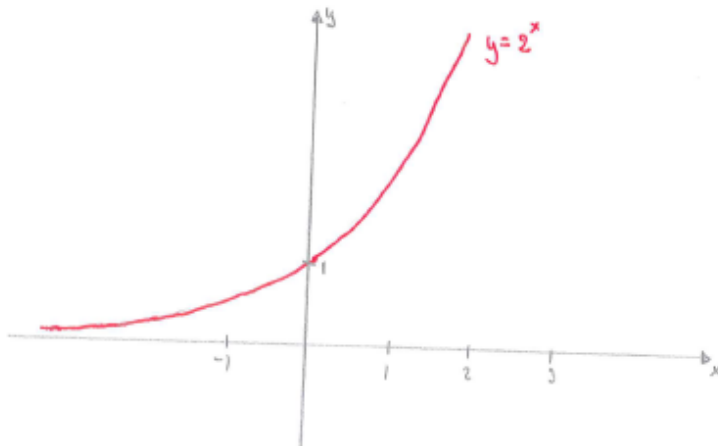
där $a > 0$ är ett konstant reellt tal.

Notera att a inte nödvändigtvis behöver vara ett heltal eller ett rationellt tal.

Definitionsmängden för en exponentialfunktion är hela $\mathbb{R}$ och värdemängden är $\mathbb{R}_+$.

Exempel

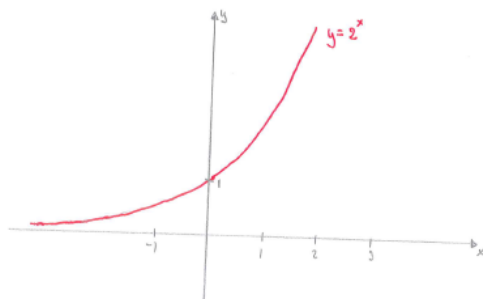
Här är grafen för $f(x) = 2^x$:



Exponentialfunktioner

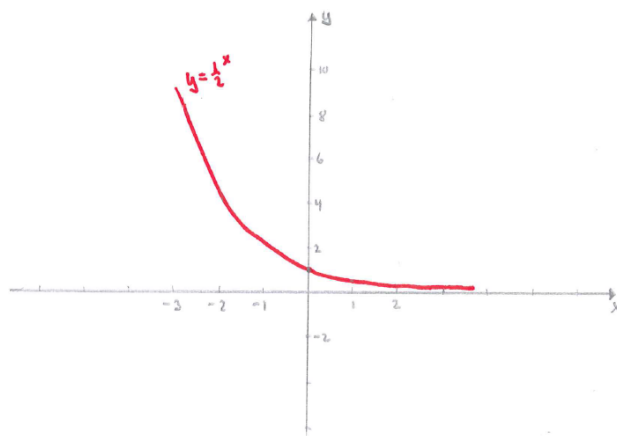
Exempel

Här är grafen för $f(x) = 2^x$ igen:



Eftersom $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{2^x}$ blir grafen för exponentialfunktionen

$$f(x) = (\frac{1}{2})^x$$



Den naturliga exponentialfunktionen

Den naturliga exponentialfunktionen $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ är den som är sin egen derivata,

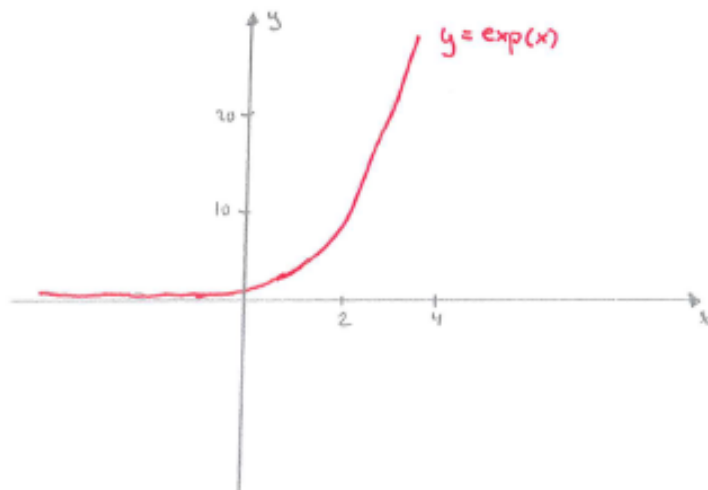
$$\exp(x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = e^x.$$

Talet e är det irrationella talet

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\dots,$$

och exp-funktionen har grafen



Logaritmfunktioner

För alla positiva reella tal a där $a \neq 1$ finns för varje positivt reellt tal y ett reelt tal x sådant att

$$y = a^x.$$

Talet x kallas då **a -logaritmen** till y och vi skriver

$$x = \log_a y.$$

En logaritmfunktion är en funktion av typen

$$f(x) = \log_a x$$

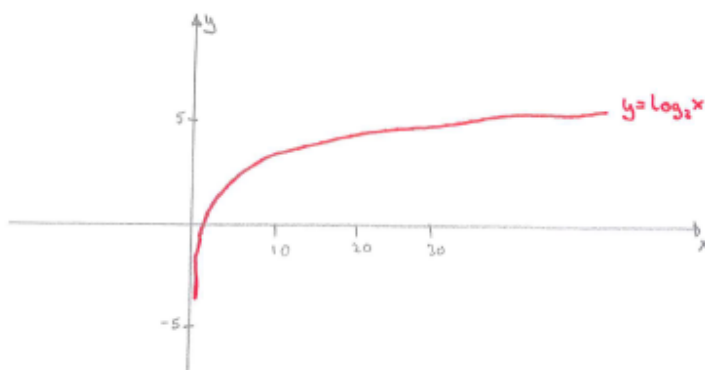
där $a > 0$ och $a \neq 1$.

Definitionsmängden är alla positiva reella tal $\mathbb{R}_+$,
och värdemängden är alla reella tal $\mathbb{R}$.

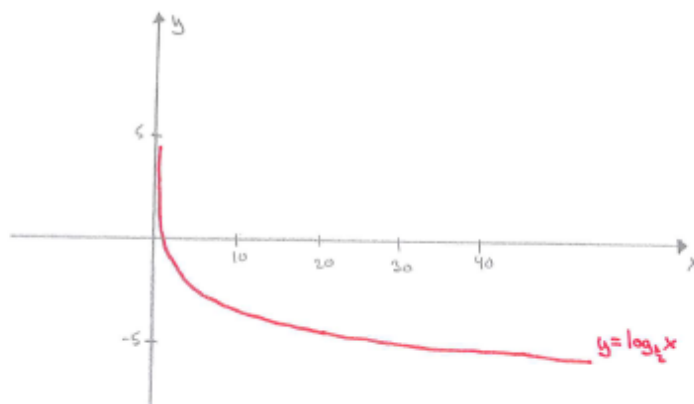
Logaritmfunktioner

Exempel

Funktionen $f(x) = \log_2(x)$ har grafen



Funktionen $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ har grafen

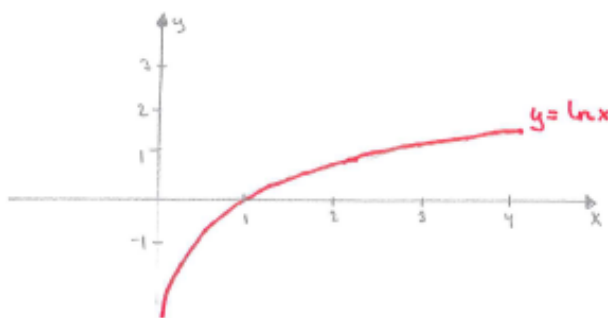


Naturliga logaritmfunktionen

Den naturliga logaritmfunktion betecknas $\ln$ och är logaritmfunktionen med bas e sådan att $y = e^x$ omm $x = \ln(y)$.

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

Naturliga logaritmfunktionen $\ln$ har grafen



Logaritmfunktioner

Exempel

Beräkna

$$\log_2 2$$

$$\log_3 9$$

$$\ln \sqrt{e}$$

$$\log_{11} \frac{1}{121}$$

Logaritmlagar

Logaritmer definieras m.h.a.potensfunktioner, så räkneregler för logaritmer följer ur potenslagarna:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Den sista formeln är bra att komma ihåg om man t.ex. ska använda miniräknaren till att beräkna $\log_3(10)$.

Logaritmlagar

Exempel

Bestäm

$$\log_4 \frac{3}{5} + \log_4 \frac{5}{3}$$

$$\ln \frac{1}{e} + 2 \ln \sqrt{e}$$

$$\frac{1}{2} \lg 100 - \lg 10^{-1}$$

(lg är svensk notation för $\log_{10}$.)

$$\log_2 4^n$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4^n$$

$$\ln(1 + 1) + \ln(1 + 1/2) + \ln(1 + 1/3) + \ln(1 + 1/4) + \ln(1 + 1/5)$$

Om $\lg x = 5/8$ och $\log_a x = 2/3$, beräkna $\lg a$.

Logaritmlagar

Exempel

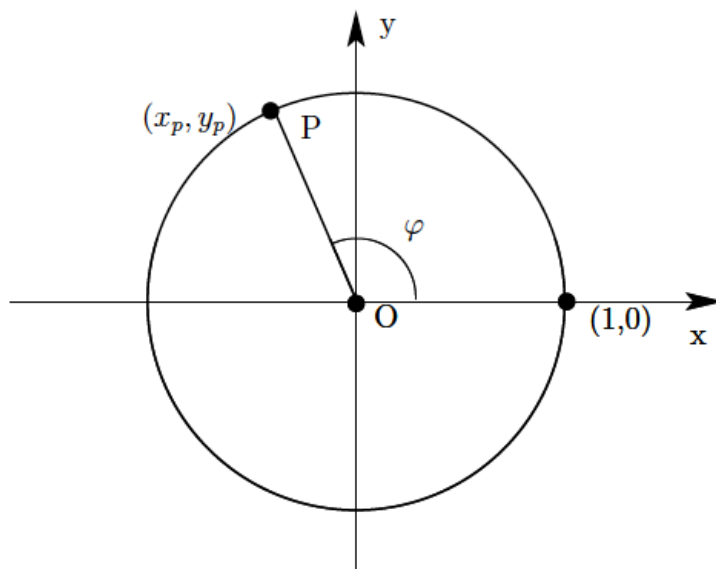
Skriv som *en* logaritm

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{3} \ln(x^2 - 1)^{\frac{3}{4}}$$

$$2 \ln(x^2 - 1) - 4 \ln(x + 1)$$

Trigonometriska funktioner

Cosinus och **sinus** funktionerna definieras genom att $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ är koordinaterna till punkten P på enhetscirkeln där linjestycket OP har vinkeln φ med x -axeln och längden 1.



$$\sin \varphi = y_p \qquad \cos \varphi = x_p$$

En vinkel räknas positiv moturs och negativ medurs.

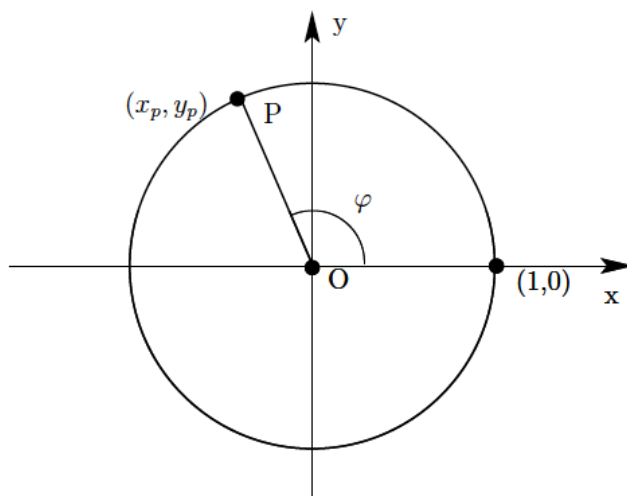
Radianer

Enhetscirkelns omkrets är 2π eftersom den har radien 1.

Längden av cirkelbågen som motsvarar vinkeln φ är då

$$x = \frac{\varphi}{360} \cdot 2\pi.$$

Vi säger att vinkeln θ är x radianer. Eftersom längder är reella tal, är vinklar som mäts i radianer reella tal.

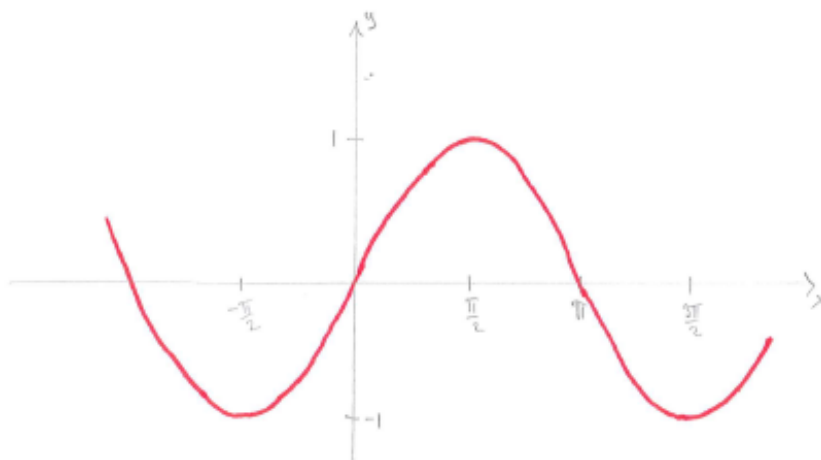


$$\sin \varphi = y_p \qquad \cos \varphi = x_p$$

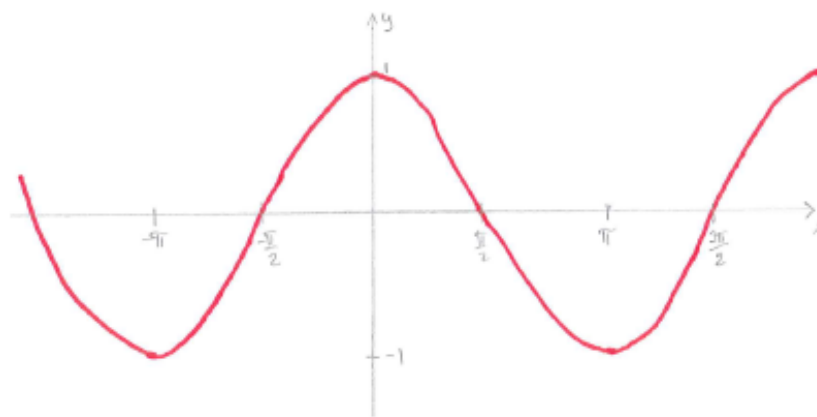
Vinkelmåttet på denna kurs och de flesta av dina mattekurser är radianer så att alla trigonometriska funktioner blir reella funktioner.

Sinus och cosinus

Grafen för $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ är



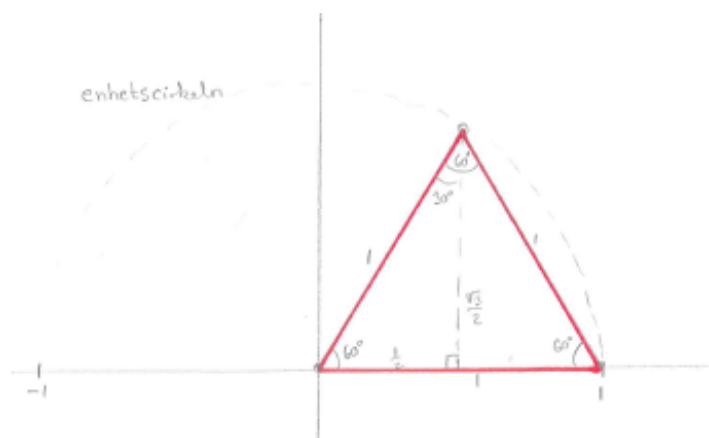
Grafen för $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ är



Sinus och cosinus

Några värden för sin och cos:

radianer	grader	sin	cos
0	0°	0	1
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0
π	180°	0	-1



Sinus och cosinus

Exempel

Ange

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(2\pi)$$

$$\sin(2\pi)$$

$$\sin(5\pi)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)$$

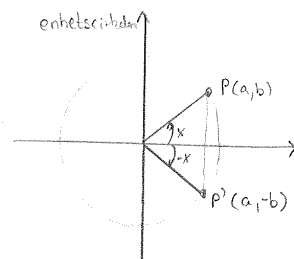
$$\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-15\pi}{4}\right)$$

Några trigonometriska identiteter

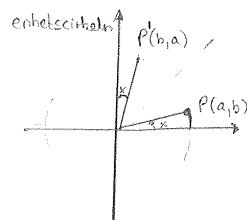
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



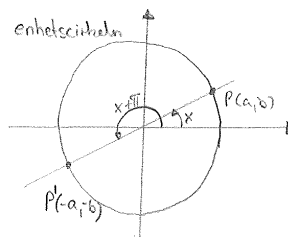
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$



Trigonometriska Ettan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Några trigonometriska ekvationer

Exempel

Lös ekvationerna

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos(x) = 0$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(x) = 0$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(6x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tangens

Tangensfunktionen definieras som

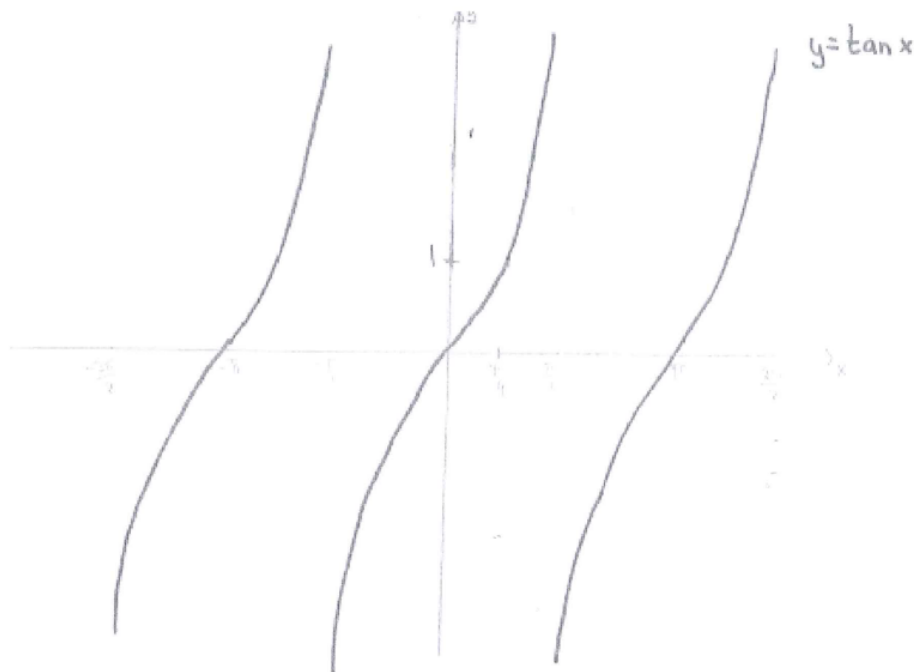
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\tan$ är då inte definierad där $\cos(x) = 0$, dvs. där $x = k\frac{\pi}{2}$ och k är ett udda heltal.

Definitionsmängden för $\tan$ är då

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\},$$

och grafen för $\tan$ är



Cotangens

Cotangensfunktionen definieras som

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$\cot$ är då inte definierad där $\sin(x) = 0$, dvs. där $x = n\pi$ och n är ett heltal.

Definitionsmängden för $\cot$ är då

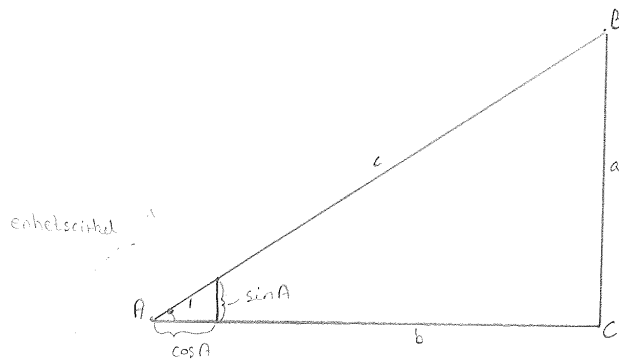
$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

och grafen för $\cot$ är



Några trigonometriska identiteter

Rätvinkliga triangeln



$$\cos A = \frac{b}{c}$$

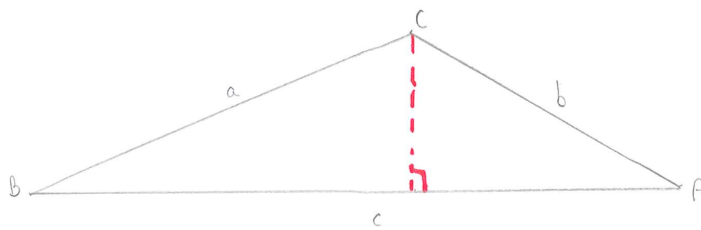
$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}$$

Några trigonometriska identiteter

För alla trianglar gäller



Sinussatsen

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cosinussatsen ("Icke-rätvinklig Pythagoras")

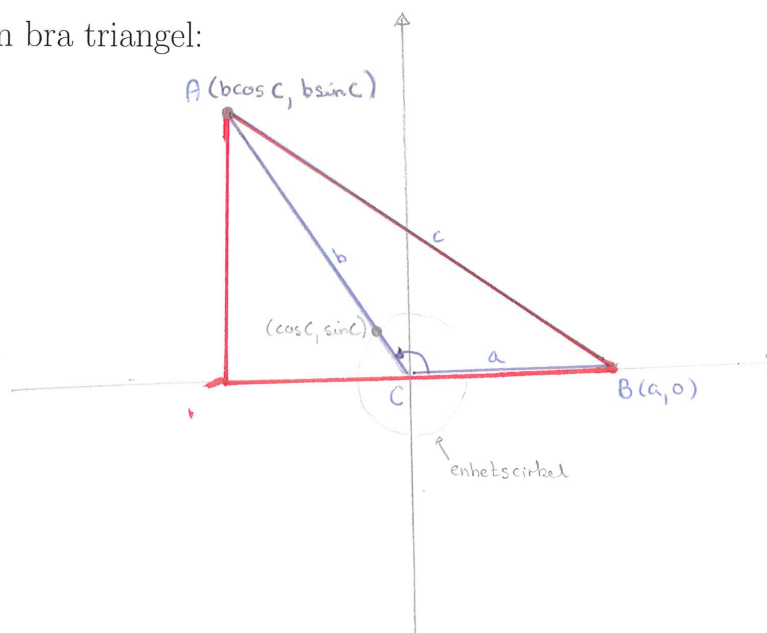
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Bevis för Cosinussatsen

Rita en bra triangel:



$$\begin{aligned}c^2 &= (b \cos C - a)^2 + (b \sin C)^2 \\&= b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C + a^2 + b^2 \sin^2 C \\&= b^2(\cos^2 C + \sin^2 C) + a^2 - 2ab \cos C \\&= b^2 + a^2 - 2ab \cos C\end{aligned}$$

Några trigonometriska identiteter

Additionsformler

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

(Bevis: Rita bra trianglar!)

Formler för dubbla vinkeln

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

och från formelerna för $\cos(2x)$ fås också

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Trigonometriska identiteter och ekvationer

Exempel

Visa att för alla x gäller

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

Beräkna

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Lös ekvationerna

$$\sin^2(x) + \cos(x) = \frac{5}{4}$$

$$1 + \sin(x) = 2 \cos^2(x)$$

$$\cos(x) \sin(x) = 0$$