DERIVATOR

Definition Derivatan till funktionen f, om denna existerar,
är funktionen som till varje x i f:s definitionsmängd
ger lutningen av tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x, f(x))$.

Lutningen är gränsvärdet

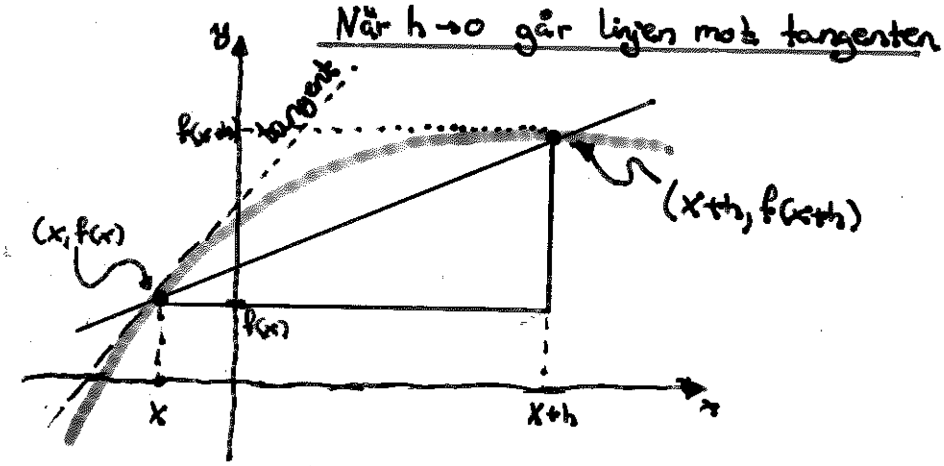
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

där differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

är lutningen av linjen genom punkterna $(x, f(x))$ och $(x+h, f(x+h))$
på kurvan $y = f(x)$.

Om gränsvärdet existerar sägs f vara deriverbar i x och gränsvärdet
är lutningen av tangenten till kurvan i $(x, f(x))$:



Vi definierar då funktionen f', derivatan till f, som

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

och vi får tangentens ekvation:

Tangentens ekvation

Ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ som går igenom $(x_0, f(x_0))$ är

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Några derivator

På din första kurs i analys kommer du beräkna derivatan till alla elementära funktioner genom att beräkna gränsvärden av differenskvoter, och du ska få se att de stämmer överens med de derivator du lärt dig i gymnasiet. T.ex.

$f(x)$	$f'(x)$
c (konstant)	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Exempel

Beräkna $f'(x)$ där $f(x) = c$ (en konstant)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Exempel

Beräkna $f'(x)$ där $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

Exempel

Beräkna $f'(x)$ där

- $f(x) = x^3$

- $f(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = \sqrt{x}$

- $f(x) = e^{2x}$

Exempel

Ange en ekvation för tangenten till $y = x^2$ i punkten där $x = 3$.

Notationer för derivator

Det finns många olika sätt att skriva derivatan till en funktion f.
Dessa kommer från de många olika sätt vi beskriver funktionen.

T.ex.

$$f(x) = 3x+2$$

kan också skrivas som

$$y = 3x+2$$

och även

$$y = f(x) = 3x+2$$

Vi skriver

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

för derivatan till f i punkten x.

DERIVERINGSREGLER

Summor och differenser

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \mp g(x)\right) = f'(x) \mp g'(x)$$

Produkt

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Sammansatt funktion (kedjeregeln)

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Kvoter

$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$ kan beräknas m.h.a kedjeregeln och produktregeln

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

eller direkt via formeln

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Exempel

Beräkna $f'(x)$ där

- $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 4$

- $f(x) = x^3 + \sin x$

- $f(x) = e^x - \cos x$

- $f(x) = 3 + \ln x$

Exempel

Derivera m.h.a produktregeln

- $x^3 \sin x$

- $x \cdot \ln x$

- $\cos^2(x)$

- $\sin(x) \cdot \cos(x)$

- $5x^2$

Exempel

Derivera m.h.a. kedjeregeln

- $f(x) = \ln(x^3+2)$

- $f(x) = (x^2+2x)^3$

- $f(x) = \sqrt{5x+2}$

- $f(x) = \sin(3x)$

- $f(x) = \cos(x^2)$

- $f(x) = \ln(\sin(2x))$

Exempel

Derivera

- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-2}$

- $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

- $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Miscellaneous Examples

$$\frac{d}{dx}2^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln 2} = e^{x\ln 2}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln 2) = e^{x\ln 2}\cdot\ln 2 = \underline{\underline{2^x\ln 2}}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2x = \underline{\underline{2x\cos(x^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{2x+2}) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{2x+2}) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\frac{d}{dx}(2x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\cdot\frac{1}{2}(2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(2x+2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+2}}\cdot 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2x+2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{2x+2}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(2x+2)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2x+2}\cdot\frac{d}{dx}(2x+2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+2}\cdot 2 = \frac{1}{2x+2}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(e^{x^2}) = -\sin(e^{x^2})\cdot\frac{d}{dx}e^{x^2} = -\sin(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\sin(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x = \underline{\underline{-2xe^{x^2}\sin(e^{x^2})}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\cdot\ln(x)\right) = -x^{-2}\cdot\ln(x) + \frac{1}{x}\cdot x^{-1} = \frac{-\ln(x)+1}{x^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-\ln x}{x^2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln(x)}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1-\ln x}{x^2}}}$$

Lokala extrempunkter

Kom ihåg att $f'(x)$ är lutningen av kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x, f(x))$,

så

om $f'(x) = 0$ har kurvan en vågrät tangent i $(x, f(x))$

om $f'(x) > 0$ är kurvan växande i $(x, f(x))$

om $f'(x) < 0$ är kurvan avtagande i $(x, f(x))$

Exempel

$f(x) = x^2$

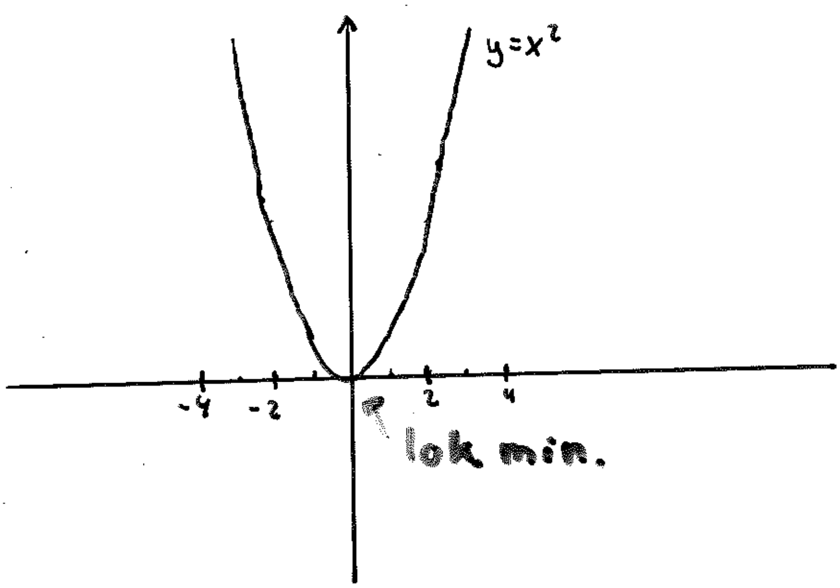
$f'(x) = 2x$, så $f'(x) = 0$ där $x = 0$.

$f'(x) < 0$ för $x < 0$

$f'(x) > 0$ för $x > 0$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	avt ↘		↗ växande

lokalt minimum



Exempel

- Hitta nollställen och lokala extrempunkter för kurvan $y = f(x)$ där

- $f(x) = 3x - x^3$

- $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

- $f(x) = 1 - x^2$

INTEGRALER

Givet en funktion $f(x)$. Om den existerar, hitta en funktion $F(x)$ vars derivata är $f(x)$, dvs.

$$F'(x) = f(x).$$

En sådan funktion $F(x)$ kallas för en primitiv funktion till $f(x)$.

Notera att om du känner en primitiv funktion till $f(x)$ känner du alla:

Sats

Om $F(x)$ och $G(x)$ är två primitiva funktioner till $f(x)$ så gäller

$$F(x) = G(x) + k$$

för någon konstant k, och om $G(x)$ är en viss primitiv funktion till $f(x)$, så ges samtliga primitiva funktioner för $f(x)$ av

$$F(x) = G(x) + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Den obestämda integralen

$$\int f(x)\,dx$$

är en beteckning som används för alla primitiva funktioner till $f(x)$.

Några primitiva funktioner

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
k (constant)	$kx + c$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$

Räkneregler för primitiva funktioner

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Exempel

Hitta primitiva funktionerna

- $\int (x^3 + \sin x)\, dx$

- $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$

- $\int 3e^x\, dx$

- $\int \sqrt{2x}\, dx$

Integraler och areor

En bestämd integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

är definierad som ett gränsvärde av en följd av summor som med tecken angen arean mellan funktionskurvan $y=f(x)$ och x-axeln, samt de två linjer $x=a$ och $x=b$.

Bestämda integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

är nära besläktad med primitiva funktionerna

$$\int f(x)\,dx$$

Vi har:

Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig och $F(x)$ uppfyller att $F'(x)=f(x)$ för alla x i intervallet $[a,b]$, så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Exempel

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2 = \underline{\underline{2}}$$

eftersom $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$, så $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x$.

Exempel

Beräkna

$$\int_1^3 3x^2\,dx$$

$$\int_{-2}^1 e^x\,dx$$

$$\int_1^2 2e^{2x}\,dx$$

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

$$\int_{-2}^1 x^3\,dx$$

Räkneregler för integraler

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,d(x) + \int_a^b g(x)\,dx$$

Exempel

Beräkna

$$\int_0^{\pi} (x^2+\cos x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} 2e^x\,dx$$

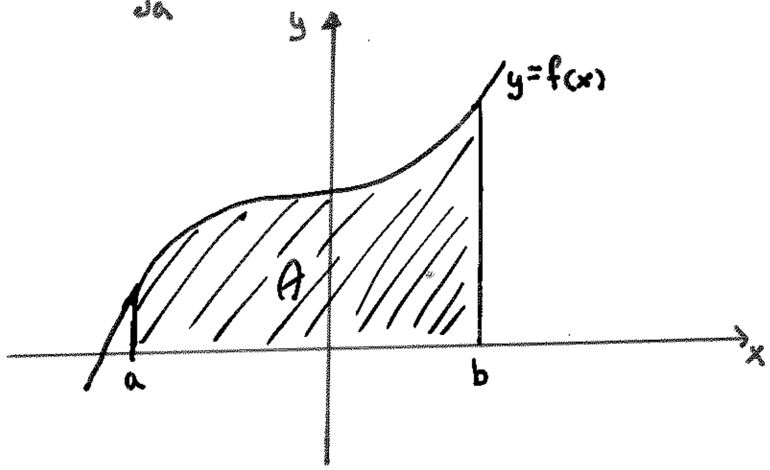
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sin(2x)\,dx$$

Areor

Om $f(x) \geq 0$ för alla x i intervallet där $a \leq x \leq b$ och A betecknar arean som begränsas av x-axeln, kurvan $y = f(x)$ och linjerna $x = a$ och $x = b$.

Så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = A.$$

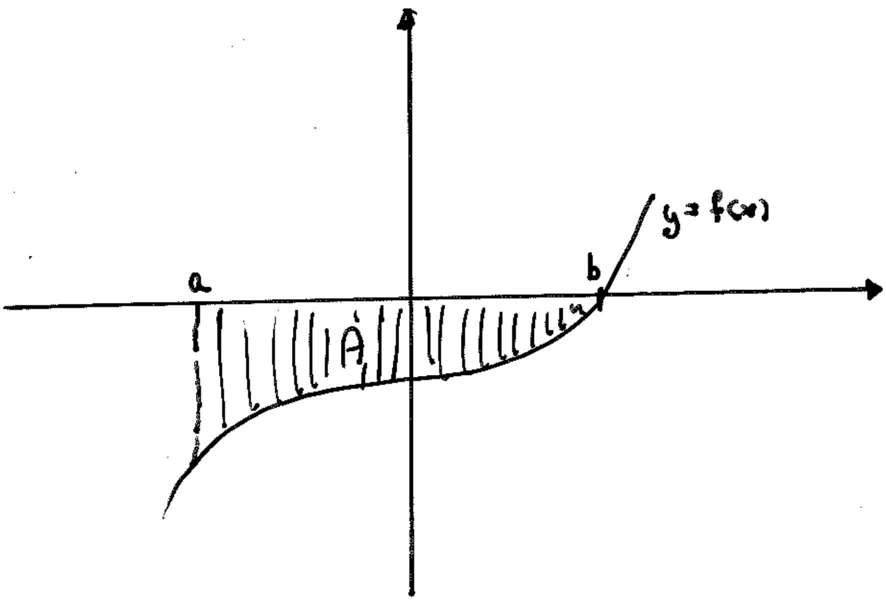


På liknande sätt:

Om $f(x) \leq 0$ för alla x i intervallet där $a \leq x \leq b$ och A betecknar arean som begränsas av x-axeln, kurvan $y = f(x)$ och linjerna $x = a$ och $x = b$.

Så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$



Exempel

Beräkna arean av området som begränsas av parabeln $y = x^2 - x - 2$, x-axeln och linjerna $x = 3$ och $x = -3$.