

Logik och bevis II

3. Bevisföring

Detta avsnitt handlar om olika metoder för att bevisa påståenden, och hur man kan konstruera ett bevis. I varje avsnitt finns en allmän beskrivning av metoden, varför den fungerar och minst ett exempel (med kommentarer i vänstra kolumnen och själva beviset i högra kolumnen). Observera att ett bevis ofta använder flera olika metoder. Innan vi börjar med bevis vill jag igen betona att definitionerna är viktiga.

3.1. Definitioner

Som sagt, definitionerna är viktiga eftersom ord kan ha en annan betydelse i matematiska sammanhang än i det vanliga språket. Vi vet att 2, 4, 6 och 8 är jämna tal, men dessa exempel på jämna tal hjälper oss inte att bevisa någonting om ett allmänt jämnt tal. Vi förstår vad ett jämnt tal är, men vi behöver också en exakt definition. Förståelse av vad vi jobbar med är naturligtvis viktigt, men definitionen behövs också så att vi kan jobba med idén, och bevisa påståenden.

När du läser en definition bör du kontrollera att den är vettig, och försöka få en idé om vad den egentligen betyder. Betrakta följande exempel.

3.1.1. Oflyttbara pålar och ostopppbara kanonkulor

En oflyttbar påle definieras som en påle som inte kan flyttas, och en ostopppbar kanonkula definieras som en kanonkula som inte kan stoppas.



Vad händer om en ostopppbar kanonkula träffar en oflyttbar påle?

3.2. Direkt bevis

Direkt bevis är den mest rättframman varianten av bevis, och är en del av nästan alla andra bevismetoder.

Att bevisa	$p \Rightarrow q$
Metod	Anta att p är sant och skriv om det till q genom en sekvens av logiska steg.
Förklaring	Kom ihåg att $p \Rightarrow q$ är sant utom i fall där p är sant och q är falskt. Om vi börjar med p och då får q , så vet vi att fallet där " p är sant och q är falskt" inte uppstår. Det betyder att " $p \Rightarrow q$ " är sant för alla sanningsvärden på p och q .

3.2.1. Exempel

Nu försöker vi att bevisa att när man kvadrerar ett jämnt tal, får man ett jämnt tal. Under bevisets gång skriver jag kommentarer om tanken bakom varje steg. Det är för att försöka visa hur bevisprocessen fungerar, istället för att låta beviset som genom magi uppenbara sig på sidan.

Sats

När man kvadrerar ett jämnt tal får man ett jämnt tal.

Kommentar

Först måste vi analysera påståendet "När man kvadrerar ett jämnt tal får man ett jämnt tal" så att det blir lättare att hantera. Vi skriver det på formen "om p så q ", och introducerar lite notation: "Om x är ett jämnt tal, så är x^2 ett jämnt tal."

Metoden går ut på att vi antar att p är sant och ska bevisa att q är sant.

Nu vet vi att x är jämnt men vad betyder jämnt? Det är en bra idé att kontrollera att du kan definitionerna av alla tekniska termer i ett påstående innan du börjar med resonemanget. Ett heltal x är jämnt om det existerar ett heltal k så att $x = 2k$. Kanske hjälper det — vad händer om vi sätter $x = 2k$ i x^2 ? Vi får $x^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Vad är det vi vill ha? Jo, vi vill visa att x^2 är jämt, dvs. lika med 2 gånger ett heltal. Om vi skriver om $4k^2$ får vi $2(2k^2)$ som är 2 gånger ett heltal. Det ser ut som om det fungerar, så vi renskriver det.

Bevis

Vi skriver om påståendet till: "om x är ett jämnt tal, så är x^2 ett jämnt tal".

Anta att x är ett jämnt tal. Vi bevisar att även x^2 är jämnt.

Eftersom x är jämnt existerar det ett heltal k så att $x = 2k$. Vi kvadrerar $x = 2k$ och får $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$. Detta är produkten av 2 och heltalet $2k^2$ så x^2 är jämnt.

3.2.2. Övningar

Bevisa, med hjälp av direkt bevis, följande påståenden.

1. Om x och y är jämna, så är xy jämnt.
2. Låt a , b och c vara heltal. Om $a \mid b$ och $b \mid c$, så gäller $a \mid c$.
3. Om a och b har samma rest när de divideras med 5, så är $a - b$ delbart med 5.
4. För alla mängder A , B och C : om $A \subseteq B$ och $B \subseteq C$, så gäller $A \subseteq C$.

3.2.3. Någonting är fel, vad?



Vad är fel i följande bevis?

Vi bevisar att om x är ett tal, så gäller $x^2 - 5 + 1 = (x - 2)(x + 2)$.

Bevis:

$$x^2 - 5 + 1 = (x - 2)(x + 2)$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2x + 2x - 4$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 4$$

Eftersom den sista raden är sann, så är den första, dvs. $x^2 - 5 + 1 = (x - 2)(x + 2)$, sann.

3.3. Bevis med hjälp av det kontrapositiva påståendet

Ofta är det lättare att bevisa att ett ekvivalent påstående är sant, än att bevisa att det ursprungliga påståendet är det. Kom ihåg att två påståenden är ekvivalenta om de har precis samma sanningsvärden. Bevis med hjälp av det kontrapositiva påståendet och motsägelsebevis (avsnitt 3.4) är två exempel på denna metod.

Att bevisa	$p \Rightarrow q$
Metod	Bevisa kontrapositiva påståendet "icke $q \Rightarrow$ icke p " (OBS: p och q har bytt sida!)
Förklaring	$p \Rightarrow q$ och icke $q \Rightarrow$ icke p är ekvivalenta (kolla detta med hjälp av en sanningstabell!), så båda är sanna eller båda är falska.

3.3.1. Exempel

Sats

För alla heltal n gäller att om n^2 är jämnt så är n jämnt.

Kommentar

Kanske är din första tanke att försöka med direkt bevis. Vi provar det. Anta att n^2 är jämnt. Då kan vi skriva det som $n^2 = 2k$. Nu gäller $n = \pm \sqrt{n^2} = \pm \sqrt{2k}$. Erm... vi har ingen aning om $\sqrt{2k}$ är jämnt eller udda... Det gick inte så bra så vi provar någonting annat. Vi försöker med det kontrapositiva påståendet. Vad är det? Låt p vara påståendet " n^2 är jämnt" och låt q vara " n är jämnt". Det kontrapositiva påståendet blir "För alla heltal n gäller att om n inte är jämnt så är n^2 inte jämnt". Naturligtvis kan vi skriva om det till "För alla heltal n gäller att om n är udda så är n^2 udda".

Bevis

Låt n vara ett heltal. Vi bevisar det ekvivalenta påståendet, "För alla heltal n gäller att om n är udda så är n^2 udda".

Problemet är nu ganska likt det i exempel 3.2.1 — kanske nästan samma bevis gäller om vi byter ut jämnt mot udda? Vad betyder "n är udda"? Det betyder att det ger rest 1 när det divideras med 2. Hur skriver vi det? Om n är udda så existerar det ett heltal k så att $n = 2k + 1$. Kvadrering ger $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, som är 2 gånger ett heltal plus 1, alltså udda.

Anta att n är udda. Då existerar det heltal k så att $n = 2k + 1$. Vi sätter in $n = 2k + 1$ i n^2 och får $n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, som är ett udda tal eftersom $2k^2 + 2k$ är ett heltal. Detta bevisar att för alla heltal n gäller att om n är udda så är n^2 udda, vilket också bevisar att för alla heltal n gäller att om n^2 är jämnt, så är n jämnt.

3.3.2. Övningar

Bevisa följande påståenden med hjälp av motsvarande kontrapositiva påstående.

1. För varje heltal n gäller att om n^2 är udda så är n udda.
2. För alla positiva heltal m och n gäller att om $m + n$ är udda så är precis ett av m och n udda.
3. För varje heltal n gäller att om n^2 inte är delbart med 7 så är n inte delbart med 7.

3.4. Motsägelsebevis

Ofta kan man använda motsägelsebevis i samma situation som bevis med hjälp av det kontrapositiva påståendet. Vilken metod bör man använda? Det är för det mesta en smaksak. Det finns ingen lätt och klar regel som säger "i dessa fall är denna bevismetoden bäst" — det kan man bara avgöra med hjälp av erfarenhet. Hur kan man få erfarenhet? Det finns två sätt: att läsa andras bevis eller att göra bevis själv. När man har läst många bevis och försöker att bevisa någonting nytt, är det ofta så att man tänker "det påminner mig om beviset av..."; så man tittar på det beviset och använder metoder och knep som man har sett tidigare.

Att bevisa	$p \Rightarrow q$
Metod	Bevisa "p och icke q" är falskt.
Förklaring	"p och icke q" är negationen av " $p \Rightarrow q$ ". (Kolla detta med hjälp av en sanningstabell!) Det betyder att om vi bevisar att "p och icke q" är falskt så är " $p \Rightarrow q$ " sant.

3.4.1. Exempel

Sats

Det finns ett oändligt antal primtal.

Kommentar

Påståendet är inte på formen " $p \Rightarrow q$ ", så först måste vi bestämma precis vad som är vad i påståendet. Vi kan skriva om det till "om S är mängden av alla primtal så är S oändlig". Då är $p = "S$ är en mängd primtal" och $q = "S$ innehåller oändligt många element". För att göra ett motsägelsebevis antar vi att " p och icke q " är sant, dvs. " S är mängden av alla primtal och S är ändlig", och visar att detta leder till en motsägelse.

Nästa steg är klurigt att komma på själv. Man multiplicerar alla primtal och adderar 1. Varför? För att det fungerar!

Vi vet att varje positivt heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av positiva primtal. Vilka primtal i S är faktorer i n ? Om vi dividerar n med p_1 blir resten 1, så p_1 delar inte n . Samma gäller för p_2 osv.

...hmmm...

S är mängden av *alla* primtal och det finns ett primtal som delar n , men det finns inte ett primtal i S som delar n . Det är nonsens, vi har alltså fått en motsägelse, och därför måste något av våra antaganden vara falskt. Det enda antagandet som kan vara falskt är att det finns ändligt många primtal.

Euklides Bevis

Anta att S är mängden av alla primtal och att S är ändlig. Då kan vi skriva upp elementen: $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

Låt $n = p_1 p_2 \dots p_k + 1$.

Eftersom $n > 1$ och n är ett heltal, så har n en faktor p som är ett primtal (aritmetikens fundamentalsats). Denna faktor p är inte någon av primtalen p_i i S ty p_i är inte faktor till n för $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Men vi antog att det inte fanns några andra primtal, så det är en motsägelse. Alltså måste S vara oändlig.

3.4.2. Övningar

Bevisa följande.

1. Om man placerar 100 kulor i 9 lådor så innehåller minst en av lådorna 12 kulor eller flera.
2. $\sqrt{5}$ är irrationellt (dvs. det kan inte skrivas som ett bråk av heltal).
3. För varje heltal n gäller att om n^2 är jämnt så är n jämnt.

3.5. Bikonditionalis

Ofta vill vi visa att två påståenden p och q är ekvivalenta, dvs. att de har samma sanningsvärden. Vi säger "p om och endast om q" och skriver " $p \iff q$ ". Ett sätt att bevisa " $p \iff q$ " är att dela upp det i två delar och bevisa dem var för sig.

Att bevisa	$p \iff q$
Metod	Bevisa " $p \Rightarrow q$ " och " $q \Rightarrow p$ ". Dem bevisar man med hjälp av metoderna som vi har diskuterat tidigare: direkt bevis, bevis med hjälp av det kontrapositiva påståendet eller motsägelsebevis.
Förklaring	" $p \iff q$ " är ekvivalent med " $(p \Rightarrow q) \text{ och } (q \Rightarrow p)$ ". (Kolla detta med hjälp av en sanningstabell!)

3.5.1. Exempel

Sats

För alla heltal n gäller att n^2 är jämnt om och endast om n är jämnt.

Kommentar

Först antar vi att n är ett heltal. Vi delar upp " n^2 är jämnt om och endast om n är jämnt" i två påståenden: "om n^2 är jämnt så är n jämnt" och "om n är jämnt så är n^2 jämnt". Vi har redan bevisat båda påståendena så beviset är därmed klart!

Bevis

Från satserna i Exempel 3.2.1 och 3.3.1 vet vi att "för alla heltal n gäller att om n är jämnt så är n^2 jämnt" och "För alla heltal n gäller att om n^2 är jämnt så är n jämnt". Tillsammans bevisar de att "för alla heltal n är n^2 jämnt om och endast om n är jämnt".

3.5.2. Exempel

Sats

Låt A , B och C vara mängder. Då gäller $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Kommentar

Kanske undrar du hur detta påstående kan vara "om och endast om"? Vi kommer till det snart, men först måste vi se hur definitionerna av mängdoperationerna ser ut. Definitionerna är:
 $X = Y$ betyder att
 $(x \in X) \iff (x \in Y)$.
 $X \cap Y = \{x: x \in X \text{ och } x \in Y\}$.
 $X \cup Y = \{x: x \in X \text{ eller } x \in Y\}$.
 Vad är det vi vill visa? Det är
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 som kan skrivas om till
 $x \in (A \cup B) \cap C$
 $\iff$
 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
 Vi ser att vi behöver dela upp beviset som i föregående exempel. Vi använder definitionerna och en del logik.

Bevis

Vi vill visa att
 $x \in (A \cup B) \cap C \iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
 Anta att $x \in (A \cup B) \cap C$. Med hjälp av definitionen av snitt kan vi skriva om det till $x \in (A \cup B)$ och $x \in C$. Definitionen av union ger att detta är ekvivalent med $(x \in A \text{ eller } x \in B)$ och $x \in C$. Observera att vi måste behålla paranteserna. Från logiken vet vi att " $(p \text{ eller } q) \text{ och } r$ " är ekvivalent med " $(p \text{ och } r) \text{ eller } (q \text{ och } r)$ ", så
 $(x \in A \text{ eller } x \in B) \text{ och } x \in C$
 är ekvivalent med
 $(x \in A \text{ och } x \in C) \text{ eller } (x \in B \text{ och } x \in C)$.
 Med hjälp av definitioner igen, får vi nu att
 $(x \in A \text{ och } x \in C) \text{ eller } (x \in B \text{ och } x \in C)$
 är ekvivalent med
 $(x \in (A \cap C) \text{ eller } x \in (B \cap C))$
 som i sin tur är ekvivalent med
 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
 Så
 $x \in (A \cup B) \cap C$
 är ekvivalent med
 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
 dvs.
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3.5.3. Övningar

Bevisa följande:

1. För alla heltal m och n gäller att $m + n$ är udda om och endast om precis en av m och n är udda.
2. För alla heltal m och n gäller att m och n har samma rest när de divideras med 5 om och endast om 5 är en delare till $m - n$.
3. Visa att för alla mängder A , B och C gäller $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

3.6. Motexempel

Ibland vill man visa att ett påstående är falskt, vilket innebär att man försöker hitta ett exempel för vilket det är falskt. Ett sådant exempel kallas för ett motexempel.

Att bevisa	icke ($\forall x, p(x)$)
Metod	Hitta ett x så att $p(x)$ inte är sant
Förklaring	Om $p(x)$ är falskt för något x så kan det inte vara sant för alla x , så alltså måste $\forall x, p(x)$ vara falskt.

3.6.1. Exempel

Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska, och visa det genom att ge ett motexempel eller göra ett bevis.

Påstående	Sant eller falskt?	Bevis eller motexempel
Alla i detta rum är levande.	Sant?	Kontrollera att ingen är död!
För alla heltal n gäller $n^2 \leq 3^n$.	Sant	Det är enkelt att kontrollera att detta resultat är sant för små värden på n . Men vi kan inte kontrollera alla värden på n ett efter ett, eftersom de är oändligt många. Hur kan vi bevisa påståendet? Vi behöver en ny bevismetod, induktion, som vi diskuterar senare (i avsnitt 3.8).
Alla i hela världen har blont hår.	Falskt	Prinsessan Victoria har brunt hår.
För alla reella tal x gäller $x^2 \geq x$.	Falskt	Låt $x = 1/2$. Då är $x^2 = 1/4 < x$.

3.6.2. Övningar

Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska. Bevisa dem som är sanna och ge ett motexempel till dem som är falska.

- Alla heltal som kan skrivas på formen n^2 , där n är ett heltal, är udda.
- $|A \cup B| = |A| + |B|$ för alla mängder A och B .
- Om a och b är rationella tal så är ab ett rationellt tal.
- Om a och $b \neq 0$ är rationella tal så är a/b ett rationellt tal.
- Om a och b är irrationella tal så är ab ett irrationellt tal.
- Om a och b är irrationella tal så är a/b ett irrationellt tal.

3.7. Existensbevis

Det finns två grundläggande sätt att bevisa att något existerar, dvs. att bevisa ett påstående av typen $\exists x: P(x)$. Det första sättet är att konstruera ett exempel. För att göra detta ger vi ett exempel b och visar att $P(b)$ är sant.

Det andra sättet är icke-konstruktivt. Det betyder att trots att vi inte kan skriva upp hur exemplet ser ut så

existerer ett sådant exempel. Alla vet att någon mördade Olof Palme trots att vi inte säkert vet vem det var som gjorde det. Vi vet att " $\exists x: x$ mördade Olof Palme" är sant, men vi vet inte vem x är.

Vi börjar med konstruktionen av ett exempel.

Att bevisa	$\exists x: P(x)$
Metod	Hitta ett x sådant att $p(x)$ är sant
Förklaring	Påståendet behöver bara att ett exempel existerar, så att lägga fram ett exempel uppfyller påståendet och visar att det är sant.

3.7.1. Exempel

Påstående	Sant eller falskt	Bevis
Det finns ett primtal mindre än 10.	Sant	2 är mindre än 10 och det är ett primtal eftersom det inte är en enhet och de enda positiva delarna är 1 och 2 själv.
Storsjöodjuret existerar.	Sant? Falskt?	Jag kan inte bevisa eller motbevisa detta. Jag kan inte hitta Storsjöodjuret och jag kan inte heller söka igenom hela Storsjön och visa att det inte finns där.
När man kvadrerar ett heltal kan man få noll.	Sant	Låt $x = 0$. Då är $x^2 = 0^2 = 0$.

3.7.2. Övningar

Bevisa eller motbevisa dessa påståenden.

1. Det finns ett primtal på formen $7n + 1$ där n är ett heltal.
2. Inte alla reella tal är irrationella.
3. Inte alla primtal är udda.
4. Det existerar ett primtal på formen $n^2 + 2n + 1$ där n är ett positivt heltal.
5. Det existerar ett heltal k så att k , $k + 2$ och $k + 4$ alla är primtal.
6. Det finns ett positivt heltal n som både är kvadraten av ett positivt heltal och ett positivt heltal upphöjt till 3.

3.7.3. Exempel

Ibland är det inte möjligt att skriva upp ett exempel för att fastställa existens. Förra vintern lämnade jag mitt hem iklädd min kappa, som hade alla knappar kvar. När jag kom fram till mitt arbete saknades en av knapparna. Jag kan säga att det existerar en punkt i tiden när knappen ramlade bort. Jag vet inte exakt när det hände, men det är utan tvekan så det hände. Följande exempel kan också illustrera ett icke-

konstruktivt bevis.

Sats

Det finns två personer i Sverige som har samma antal hårstrån på sitt huvud.

Kommentar

Vi behöver ett idé att starta detta bevis med. Det ser inte ut att vara mycket information i frågan, så vi måste vända oss till vår egen erfarenhet. Vad vet vi om det som nämns i påståendet? Vad kan vi veta (eller kan vi gissa och kontrollera senare) om antalet hår på huvudet eller människor i Sverige som kan hjälpa oss? Hur många hår kan man ha på huvudet? Låt oss ta 2 miljoner hår som en övre gräns för ögonblicket och se om vi kan förfina det senare.

Vi behöver också veta antalet människor i Sverige. Det är definitivt mer än 8 miljoner människor i Sverige. Alltså: 2 miljoner möjliga hårstrån på huvudet och 8 miljoner människor. Så högst 2 miljoner människor kan ha olika antal hårstrån på huvudet. Det verkar som vi kommer någonstans, kanske vi skulle försöka att skriva ner det korrekt.

Nu har vi grunden för ett motsägelser. Vi måste ha åtta miljoner positiva heltal men vi har bara två miljoner.

Bevis

Ingen person har mer än två miljoner hårstrån på sitt huvud. Det är minst åtta miljoner människor i Sverige. Anta att ingen av dessa åtta miljoner människor har samma antal hårstrån på huvudet. Då måste det finnas åtta miljoner olika positiva heltal som alla är mindre än eller lika med två miljoner. Men det finns bara två miljoner sådana heltal, nämligen $1, 2, 3, \dots, 2000000$.

Vi har en motsägelser, så vårt antagande att inte två personer har samma antal hårstrån på huvudet är falskt, vilket bevisar att det finns minst två människor med samma antal hårstrån på huvudet.

Kan vi säga något mer än detta? Kan vi säga att minst 24 människor har samma antal hårstrån på huvudet? Eller åtminstone 4 eller något annat antal? Kan du bygga på argumentationen eller generalisera på något sätt?

3.7.4. Övningar

Bevisa eller motbevisa dessa påståenden.

1. En tennisklubb har $2n + 1$ medlemmar, där n är ett positivt heltal. Om det under en vecka spelades $n + 1$ matcher mellan medlemmarna, så spelade någon medlem mer än 1 match.
2. I ett rum med ett antal personer som har skakat hand med varandra, finns det minst två personer som har skakat hand med lika många personer.

3.8. Induktion

Tänk på en rad dominobrickor som är placerade så pass nära varandra, att om en dominobricka välter, så välter även nästa bricka. Om bricka 1 välter, så kommer den att välla bricka 2, som i sin tur välter bricka 3, och så vidare. Det vill säga, om bricka 1, 2, 3, ..., k välter, så välter även bricka $k + 1$, och detta gäller för alla $k \geq 1$.

Anta att vi vet följande. Vilken slutsats kan vi dra?

1. Dominobricka 1 välter
2. Om dominobricka 1, 2, ..., k välter, så välter dominobricka $k + 1$, för alla positiva heltal k .

Det vi vet är: om processen med vältande dominobrickor börjar (bricka 1 välter) och om det gäller att om alla föregående brickor välter så välter också nästa bricka, så kan vi dra slutsatsen att alla brickor välter. Eller för att säga det på ett annat sätt: bricka n välter för alla positiva heltal n .

Vi kommer nu formalisera denna metod för att få den så kallade induktionsprincipen. Låt $P(n)$ vara påståendet "dominobricka n välter". Vi skriver $P(n)$ för att markera att dess sanningsvärde är beroende av n .

Induktionsprincipen

Antag att

1. $P(1)$ är sant
2. " $P(1)$ och $P(2)$ och ... och $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ " är sant för alla heltal $k \geq 1$.

Då är $P(n)$ sant för alla heltal $n \geq 1$.

Vi kunde startat med att välla dominobricka 5 och då skulle alla dominobrickor från och med nummer 5 också välla. Det kan generaliseras till följande.

Låt n_0 vara ett heltal och antag att

1. $P(n_0)$ är sant.
2. " $P(n_0)$ och $P(n_0 + 1)$ och ... och $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ " är sant för alla heltal $k \geq n_0$

Då är $P(n)$ sant för alla heltal $n \geq n_0$.

Med andra ord, så länge som vi har en startpunkt så spelar det ingen roll vad startpunkten är numrerad som.

Steg 1 kallas för induktionsbasen och steg 2 för induktionssteget.

3.8.1. Exempel

Sats

Låt S_n vara summan av de första n positiva heltalen. Då är $S_n = n(n + 1)/2$, för alla heltal $n \geq 1$.

Kommentar

Vi börjar med att ange vad vi kommer att bevisa.

Nu kan vi bevisa induktionsbasen. Här har vi $n = 1$ som vår induktionsbas så vi vill bevisa att $P(1)$ är sant. Vad är S_1 ? Det är summan av de första "1" positiva heltalen, vilket är 1.

Nu när vi bevisat induktionsbasen, kommer vi att bevisa att om $P(1), P(2), \dots, P(k)$ är sanna för något heltal $k \geq 1$ så är $P(k+1)$ också sant. Tänk tillbaka på, att för att bevisa "om p så q " påståendet så behöver vi bara titta på de fall där p är sant. (Se avsnitt 3.2 om direkt bevis.) Vi antar att p är sant och försöker att resonera logiskt tills vi når fram till q . Eftersom vi har börjat med något som är sant, och argumenterar korrekt, så vet vi att q är sant.

Vad vi nu gör är att betrakta S_{k+1} vilket är summan av de första $k + 1$ heltalen, och sedan använder vi att $P(k)$ är sant för att bevisa att S_{k+1} är lika med $(k + 1)(k + 2)/2$. Kom ihåg att din argumentation skall vara enkel att följa, och att det skall vara förståeligt av människor som inte har tänkt på det här problemet själva.

Nu när vi har slutfört beviset av både $P(1)$ och " $P(1)$ och ... och $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ " behöver vi bara dra slutsatsen att vi har bevisat påståendet. Utan denna slutsats är beviset inte komplett.

Det är inte bara exempel som resultat om summan ovan som vi kan bevisa med hjälp av induktion. Vi kan också bevisa resultat om t.ex. delbarhet, eller som inte har med aritmetik att göra över huvud taget (se Johnsonbaugh Edition 5 s. 44 - 45 (50 - 51 i Edition 4) [57 - 58 i Edition 6]).

Bevis

Låt $P(n)$ vara påståendet $S_n = n(n + 1)/2$. Vi kommer att bevisa att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq 1$.

I. Induktionsbas

Låt $n = 1$. Då är $S_1 = 1$, och $n(n + 1)/2 = 1(1 + 1)/2 = 1$, dvs. $S_n = n(n + 1)/2$ vilket bevisar $P(1)$.

II. Induktionssteg

Vi vill nu bevisa att "om $P(1)$ och $P(2)$ och ... och $P(k)$ är sanna för något $k \geq 1$ så är $P(k+1)$ sant". Vi antar därför att $P(1)$ och $P(2)$ och ... och $P(k)$ är sanna, för något $k \geq 1$. T.ex. så är $P(k)$ ekvivalent med $S_k = k(k + 1)/2$. Vi visar att $P(k+1)$, som är ekvivalent med $S_{k+1} = (k + 1)(k + 2)/2$, är sant.

Betrakta S_{k+1} .

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) \\ &= S_k + (k + 1) \\ &\quad [\text{från definitionen av } S_k] \\ &= k(k + 1)/2 + (k + 1) \\ &\quad [\text{från } P(k)] \\ &= (k + 1)(k/2 + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2)/2 \\ &\quad [\text{vilket var vad vi ville ha.}] \end{aligned}$$

Detta bevisar att $P(k+1)$ är sant ifall $P(1), P(2), \dots$, och $P(k)$ är sanna.

III. Slutsats

Vi har nu bevisat genom induktionbevis att $P(1)$ är sant och " $P(1)$ och ... och $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för $k \geq 1$ " är sant, så vi har bevisat att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq 1$.

3.8.2. Exempel

Sats

För alla positiva heltal n är $n^2 + n$ delbart med 2.

Kommentar

Denna gång skriver vi ett bevis utan att använda notationen $P(n)$. Denna notation är sällan använd, även om det till en början hjälper för att klargöra vad vi gör.

Nu när vi har bevisat induktionsbasen, kommer vi att bevisa nästa steg. Vad betyder delbart? Det betyder att resten är 0.

För att visa att ett heltal är delbart med 2 kan vi försöka skriva det som att 2 gånger ett heltal (definitionen), eller vi kan skriva det som summan av jämna heltal. Förvissa dig om att du kan bevisa att summan av två jämna heltal är jämnt (Sats B3.1 i Block 3). Kom ihåg att vi har antagit att $k^2 + k$ är delbart med 2.

Vi har antagit att $k^2 + k$ är delbart med 2, så vi tar ut det och ser vad vi har kvar.

Och nu till slutsatsen.

Bevis (Induktion över n)

I. Induktionsbas

Låt $n = 1$, då är $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$, vilket definitivt är delbart med 2. Detta bevisar att påståendet är sant för $n = 1$.

II. Induktionssteg

Anta att påståendet är sant för $n = 1, 2, \dots, k$ där $k \geq 1$. För $n = k$ medför det, att $k^2 + k$ är delbart med 2. Vi vill bevisa att påståendet är sant för $n = k + 1$, dvs. att $(k + 1)^2 + (k + 1)$ är delbart med 2.

Betrakta $(k + 1)^2 + (k + 1)$. Vi kan skriva om detta som $(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + 3k + 2$.

Nu har vi $k^2 + 3k + 2 = (k^2 + k) + 2(k + 1)$. Från vårt antagande är $k^2 + k$ delbart med 2. Nästa term, $2(k + 1)$ där $(k + 1)$ är ett heltal, är också delbart med 2. Eftersom summan av två jämna heltal alltid är jämnt måste också $(k^2 + k) + 2(k + 1)$ vara jämnt, och därför delbart med 2. Men detta var ju samma sak som $(k + 1)^2 + (k + 1)$. Vi har alltså visat att påståendet är sant för $n = k + 1$.

III. Slutsats

Eftersom (i) påståendet är sant för $n = 1$ och (ii) om det är sant för $n = 1, \dots, k$, så är det också sant för $n = k + 1$, så har vi med hjälp av induktion visat att det är sant för alla positiva heltal n .

3.8.3. Exempel

Sats

$2^n \geq n^2$ för alla heltal $n \geq 4$.

Kommentar

Observera att vi börjar med $n = 4$.

Nu måste vi bevisa att $P(1), \dots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Vi behöver bevisa det med hjälp av ett direkt bevis. Glöm inte att med ett direkt bevis antar man att $P(1), \dots, P(k)$ är sanna och visar att $P(k+1)$ är sant. Glöm inte heller att ange $k \geq 4$. Det behöver vi i beviset!

Nu måste vi, med hjälp av $2^k \geq k^2$, visa att $2^{(k+1)} \geq (k+1)^2$. Det kan vara lite svårt att se precis vad det är vi vill komma fram till, så vi skriver om $(k+1)^2$ som $k^2 + 2k + 1$, och jämför hela tiden med detta.

Vi har 2^{k+1} . Hur kan vi skriva om det så att vi kan använda $2^k \geq k^2$? Jo, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ så $2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$ (multiplikation av båda sidorna av $2^k \geq k^2$ med 2.) Vi jämför $2k^2$ med $k^2 + 2k + 1$ och ser att vi har k^2 i båda. $2k^2 = k^2 + k^2$ så vad vi har kvar att jämföra är k^2 och $2k + 1$.

Vi vet att $k \geq 4$, så $k \cdot k \geq 4 \cdot k$, dvs. $k^2 \geq 4k$. På samma sätt är $4k \geq 8$.

Kom ihåg slutsatsen!

Bevis

I. Induktionsbas

Låt $n = 4$, då är $2^n = 2^4 = 16$ och $n^2 = 4^2 = 16$ så $2^n \geq n^2$ för $n = 4$.

II. Induktionssteg

Anta att $2^k \geq k^2$ för ett heltal $k \geq 4$. (Induktionsantagande)

Vi vill visa att $2^{(k+1)} \geq (k+1)^2$.

Betrakta 2^{k+1} :

$$\begin{aligned}
 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\
 &\geq 2k^2 && \text{(induktionsantagandet)} \\
 &\geq k^2 + k^2 \\
 &\geq k^2 + 4k && \text{(eftersom } k \geq 4) \\
 &= k^2 + 2k + 2k \\
 &\geq k^2 + 2k + 8 && \text{(eftersom } k \geq 4) \\
 &\geq k^2 + 2k + 1 \\
 &= (k+1)^2
 \end{aligned}$$

vilket bevisar att $2^{k+1} \geq (k+1)^2$.

III. Slutsats

Med hjälp av induktion har vi visat att $2^n \geq n^2$ för alla heltal $n \geq 4$.

Kommentar till beviset

Varför började vi med $n = 4$ i föregående bevis? Om $n = 1$, gäller $2^1 \geq 1^2$, så vad skulle ha hänt om vi hade börjat med $n = 1$? Induktionsbasen skulle fungera, men induktionssteget går inte:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2k^2 && \text{OK} \\ &\geq 2k^2 && (\text{induktionsantagandet}), \text{OK} \\ &\geq k^2 + k^2 && \text{OK} \\ &\geq k^2 + 4k \text{ (ty } k \geq 4) && \text{Vi måste byta ut 4 mot 1, och då är det kört eftersom } k^2 + 1 \cdot k \text{ inte är större eller lika med } (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Vi kan inte börja induktionsbeviset med 1. Gäller $2^n \geq n^2$ när $n = 2$? Ja, det gör det, men induktionssteget går fortfarande inte av samma anledning som förut. Induktionssteget gäller när $n = 3$ (byt ut 4 mot 3 ovan), men då stämmer inte induktionsbasen eftersom $2^3 < 3^2$.

Vi ser att om vi börjar med "fel" tal, så är antingen induktionssteget eller induktionsbasen falsk (eller båda två).

3.8.4. Exempel

Följande exempel handlar om Fibonaccitalen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,.... Kanske har du sett dem förut? De uppstår i naturen t.ex. som antalet spiraler i mitten av en solros. Om du vill veta mer om dem kan du t.ex. titta på <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>.

Sats

Låt $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för $n \geq 3$. Då gäller $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$, för alla heltal $n \geq 1$.

Kommentar

Svåraste delen av detta bevis är att lista ut vad vi vill visa och vad som är definitionen. Meningen som börjar "Låt" är definitionen av f_n så det är inte det som vi ska bevisa — vi tar det som ett fakta. Delen vi ska bevisa börjar med "Då gäller...". Vi måste också ha *två* basfall ($n=1$ och $n=2$) i induktionsbasen eftersom formeln i antagandet endast gäller för n större eller lika med 3.

Bevis

I. Induktionsbas

När $n = 1$ är vänsterledet lika med $f_1 = 1$ och högerledet är $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = f_2 + f_1 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$. Alltså gäller $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ för $n = 1$. När $n = 2$, är vänsterledet lika med $f_1 + f_2 = 2$ och högerledet är $f_{2+2} - 1 = f_4 - 1 = f_3 + f_2 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$. Alltså gäller $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ även när $n = 2$.

Observera att vi inte bara använder induktionsantagandet, utan också definitionen $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, där $n = k + 2$, som var given som ett antagande i satsen.

II. Induktionssteg

Antag att $f_1 + f_2 + \dots + f_s = f_{s+2} - 1$, för alla heltal s med $2 \leq s \leq k$.

Vi vill visa att $f_1 + f_2 + \dots + f_{k+1} = f_{k+3} - 1$.

Betrakta vänsterledet: $f_1 + f_2 + \dots + f_{k+1}$.

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + \dots + f_{k+1} &= (f_1 + f_2 + \dots + f_k) + f_{k+1} \\ &= (f_{k+2} - 1) + f_{k+1} && \text{(induktionsantagandet för } s=k) \\ &= f_{k+3} - 1 && \text{(definitionen av } f_n) \end{aligned}$$

vilket var vad vi ville ha.

Som vanligt måste vi sluta med slutsatsen.

III. Slutsats

Vi har visat att villkoren för induktionsprincipen gäller, så $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ gäller för alla heltal $n \geq 1$.

3.8.5. Övningar

Bevisa följande påståenden med hjälp av induktion.

1. $2^n \geq 2n + 1$ för alla heltal $n \geq 4$.
2. 4 är en delare till $5^n - 1$ för alla heltal $n \geq 1$.
3. $1 + 2^n < 3^n$ för alla heltal $n \geq 2$.
4. Låt $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för alla heltal $n \geq 3$.
Då gäller $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$, för alla heltal $n \geq 1$.
5. Låt $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för alla heltal $n \geq 3$.
Då gäller $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$, för alla heltal $n \geq 1$.

© Sarah Norell

c/o [Pia Heidtmann](#)

MID SWEDEN UNIVERSITY

Department of Engineering, Physics and Mathematics

Mid Sweden University

S-851 70 SUNDSVALL

Sweden

This note and any parts of it and any previous and future versions of it must not be copied or disseminated in any printed or electronic form or stored on any publicly accessible website other than <http://www.tfm.miun.se/~piahei/adm/res/> without permission from [Pia Heidtmann](#).

The author welcomes comments and corrections via [email](#). All contributions incorporated in

updates of the manuscript will be acknowledged.

The author would like to thank the following for their contribution to various updates of the original manuscript:

Sam Lodin, Fredrik Ståhl, Anders Gustafsson and Pia Heidtmann.

Last updated 051122