



MA014G

Algebra och Diskret Matematik A

Svar på uppgifter till Block 3

Referenser utan parenteser är till [J] edition 5, referenser i ()-parenteser är till [J] edition 4, och referenser i []-parenteser är till [J] edition 6.

Uppgifter i läsanvisningen

Uppgift B3.1

$$\begin{aligned} \text{T.ex. } 3 &= (-6)3 + (3)7; \\ 7 &= (-14)3 + (7)7; \\ 0 &= (7)3 + (-3)7; \\ -7 &= (14)3 + (-7)7; \\ 40 &= (-80)3 + (40)7. \end{aligned}$$

Uppgift B3.2

- (a) $\{-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
 (b) $\{-12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;
 (c) $\{-12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12\}$.

Uppgift B3.3

- (a) $\text{sgd}(3,7) = 1$, så $L = \{1x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$;
 (b) $\text{sgd}(4,6) = 2$, så $L = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$;
 (c) $\text{sgd}(6,9) = 3$, så $L = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$.

Extra övningsuppgifter i linjärkombinationer och aritmetikens fundamentalsats

- (a) I ett av ovanstående exempel fann vi att $\text{sgd}(15939, 9367) = 1$ med hjälp av Euklides algoritm, som vi nu skriver om:

$$\begin{array}{lll} 15939 = 9367(1) + 6572 & \implies & 6572 = 15939 - 9367(1) \\ 9367 = 6572(1) + 2795 & \implies & 2795 = 9367 - 6572(1) \\ 6572 = 2795(2) + 982 & \implies & 982 = 6572 - 2795(2) \\ 2795 = 982(2) + 831 & \implies & 831 = 2795 - 982(2) \\ 982 = 831(1) + 151 & \implies & 151 = 982 - 831(1) \\ 831 = 151(5) + 76 & \implies & 76 = 831 - 151(5) \\ 151 = 76(1) + 75 & \implies & 75 = 151 - 76(1) \\ 76 = 75(1) + 1 & \implies & 1 = 76 - 75(1) \\ 75 = 1(75) & & \end{array}$$

Vi börjar med den 8:e ekvationen, som uttrycker $\text{sgd}(15939, 9367) = 1$ som en linjärkombination av 76 och 75. Därefter substituerar vi den 7:e ekvationen in i uttrycket, förenklar det, substituerar sedan den 6:e ekvationen in i uttrycket, förenklar

igen, etc. :

$$\begin{aligned}
 1 &= 76 - 75(1) \\
 &= 76 - [151 - 76(1)](1) && \text{[här substituerar vi in 7:e ekvationen]} \\
 &= 76(2) - 151(1) && \text{[förenkling] [Koll: HL =152 - 151 = 1]} \\
 &= [831 - 151(5)](2) - 151(1) && \text{[här substituerar vi in 6:e ekvationen]} \\
 &= 831(2) - 151(11) && \text{[förenkling] [Koll: HL =1662 - 1661 = 1]} \\
 &= 831(2) - [982 - 831(1)](11) && \text{[här substituerar vi in 5:e ekvationen]} \\
 &= 831(13) - 982(11) && \text{[förenkling] [Koll: HL =10803 - 10802 = 1]} \\
 &= [2795 - 982(2)](13) - 982(11) && \text{[här substituerar vi in 4:e ekvationen]} \\
 &= 2795(13) - 982(37) && \text{[förenkling] [Koll: HL =36335 - 36334 = 1]} \\
 &= 2795(13) - [6572 - 2795(2)](37) && \text{[här substituerar vi in 3:e ekvationen]} \\
 &= 2795(87) - 6572(37) && \text{[förenkling] [Koll: HL =243165 - 243164 = 1]} \\
 &= [9367 - 6572(1)](87) - 6572(37) && \text{[här substituerar vi in 2:e ekvationen]} \\
 &= 9367(87) - 6572(124) && \text{[förenkling] [Koll: HL =814929 - 814928 = 1]} \\
 &= 9367(87) - [15939 - 9367(1)](124) && \text{[här substituerar vi in 1:e ekvationen]} \\
 &= 9367(211) - 15939(124) && \text{[förenkling] [Koll: HL =1976437 - 1976436 = 1]}
 \end{aligned}$$

Från den sista ekvationen fås nu, att $1 = 15939a + 9367b$, där $a = -124$ och $b = 211$.

(b) Ur (a) fås $1 = 9367(211) - 15939(124)$, så

$$5 = 9367(211)(5) - 15939(124)(5) = \underline{9367(1055) + 15939(-620)}.$$

(c) $100 = 9367(21100) + 15939(-12400)$.

(d) $60 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, där enheten är 1.

(e) $-60 = (-1) \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, där enheten är -1.

(f) $-3 = (-1) \times 3$, där enheten är -1.

[J] sida 131 (156-157) [213]:

1. (7.) [1.]

$$\begin{aligned}
 90 &= 60(1) + 30; \\
 60 &= 30(2), \\
 \text{så } \text{sgd}(90,60) &= 30.
 \end{aligned}$$

2. (8.) [2.]

$$\begin{aligned}
 273 &= 110(2) + 53; \\
 110 &= 53(2) + 4; \\
 53 &= 4(13) + 1; \\
 4 &= 1(4), \\
 \text{så } \text{sgd}(273,110) &= 1.
 \end{aligned}$$

3. (9.) [3.]

$$\begin{aligned}
 1400 &= 220(6) + 80; \\
 220 &= 80(2) + 60; \\
 80 &= 60(1) + \mathbf{20}; \\
 60 &= 20(3), \\
 \text{så } \text{sgd}(1400, 220) &= 20.
 \end{aligned}$$

4. (10.) [4.]

$$\begin{aligned}
 825 &= 315(2) + 195; \\
 315 &= 195(1) + 120; \\
 195 &= 120(1) + 75; \\
 120 &= 75(1) + 45; \\
 75 &= 45(1) + 30; \\
 45 &= 30(1) + \mathbf{15}; \\
 30 &= 15(2), \\
 \text{så } \text{sgd}(825, 315) &= 15.
 \end{aligned}$$

5. (11.) [5.] $\text{sgd}(20, 40) = 20$, eftersom $20 \mid 40$.

6. (12.) [6.] $\text{sgd}(331, 993) = 331$, eftersom $331 \mid 993$.

7. (13.) [7.]

$$\begin{aligned}
 4807 &= 2091(2) + 625; \\
 2091 &= 625(3) + 216; \\
 625 &= 216(2) + 193; \\
 216 &= 193(1) + 23; \\
 193 &= 23(8) + 9; \\
 23 &= 9(2) + 5; \\
 9 &= 5(1) + 4; \\
 5 &= 4(1) + \mathbf{1}; \\
 4 &= 1(4), \\
 \text{så } \text{sgd}(4807, 2091) &= 1.
 \end{aligned}$$

8. (14.) [8.] $\text{sgd}(2475, 32670) = 495$.

9. (15.) [9.] $\text{sgd}(67942, 4209) = 23$.

18. (22.) [11.]

Nr. 1: (7:) [1:] $30 = 90(1) + (60)(-1)$

Nr. 2: (8:) [2:]

$$\begin{aligned}
 273 &= 110(2) + 53 \implies 53 = 273 - 110(2) \\
 110 &= 53(2) + 4 \implies 4 = 110 - 53(2) \\
 53 &= 4(13) + \mathbf{1} \implies 1 = 53 - 4(13).
 \end{aligned}$$

Därav fås

$$\begin{aligned}
 1 &= 53 - 4(13) \\
 &= 53 - [110 - 53(2)](13) \\
 &= 53(27) - 110(13) \\
 &= [273 - 110(2)](27) - 110(13) \\
 &= \underline{273(27) + 110(-67)}.
 \end{aligned}$$

Nr. 3: (9:) [3:]

$$\begin{aligned}
 1400 &= 220(6) + 80 \implies 80 = 1400 - 220(6) \\
 220 &= 80(2) + 60 \implies 60 = 220 - 80(2) \\
 80 &= 60(1) + \mathbf{20} \implies 20 = 80 - 60(1)
 \end{aligned}$$

Därav fås

$$20 = 80 - 60$$

$$\begin{aligned}
 &= 80 - [220 - 80(2)] \\
 &= 80(3) - 220 \\
 &= [1400 - 220(6)](3) - 220 \\
 &= \underline{1400(3) + 220(-19)}.
 \end{aligned}$$

Nr. 4: (10:) [4:]

$$\begin{aligned}
 15 &= 45 - 30 \\
 &= 45 - [75 - 45] \\
 &= 45(2) - 75 \\
 &= [120 - 75](2) - 75 \\
 &= 120(2) - [195 - 120](3) \\
 &= [315 - 195](5) - 195(3) \\
 &= 315(5) - 195(8) \\
 &= 315(5) - [825 - 315(2)](8) \\
 &= \underline{825(-8) + 315(21)}.
 \end{aligned}$$

Nr. 7: (13:) [7:]

$$\begin{aligned}
 1 &= 5 - 4 \\
 &= 5 - [9 - 5] \\
 &= 5(2) - 9 \\
 &= [23 - 9(2)](2) - 9 \\
 &= 23(2) - 9(5) \\
 &= 23(2) - [193 - 23(8)](5) \\
 &= 23(42) - 193(5) \\
 &= [216 - 193](42) - 193(5) \\
 &= 216(42) - 193(47) \\
 &= 216(42) - [625 - 216(2)](47) \\
 &= 216(136) - 625(47) \\
 &= [2091 - 625(3)](136) - 625(47) \\
 &= 2091(136) - [4807 - 2091(2)](455) \\
 &= \underline{4807(-455) + 2091(1046)}.
 \end{aligned}$$

[J] sida 137 (163-165) [179]

5. (5.) [finns ej] $\text{sgd}(55,20) = 5$

21. (14.) [18.]

Antalet kaninpar efter ett år = antalet kaninpar efter 12 månader, så det är a_{12} vi skal räkna ut här. Därför har vi

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= 1 \\
 a_2 &= a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2 \\
 a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\
 a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5 \\
 a_5 &= a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8 \\
 a_6 &= a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13 \\
 a_7 &= a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21 \\
 a_8 &= a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34 \\
 a_9 &= a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55 \\
 a_{10} &= a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89
 \end{aligned}$$

$$a_{11} = a_{10} + a_9 = 89 + 55 = 144$$

$$a_{12} = a_{11} + a_{10} = 144 + 89 = 233$$

© [Pia Heidtmann](#)

MID SWEDEN UNIVERSITY

Department of Engineering, Physics and Mathematics

Mid Sweden University

S-851 70 SUNDSVALL

Sweden

Updated 070811