



MA014G

Algebra och Diskret Matematik A

Svar på uppgifter till Block 5

[L]2.2.3 Negation

Bestäm negationen av följande påståenden.

[1] Jag är längre än 2,00m	Svar!
[2] Jag har brunt hår.	Svar!
[3] Heltalet x är udda.	Svar!
[4] Sarah är engelska och Pia är danska.	Svar!

[L]2.3.6 Och, eller

Låt p vara påståendet " $5 < 3$ ", låt q vara påståendet "En vecka innehåller precis 6 dagar" och låt r vara påståendet "Alla häster är bruna". Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska.

[a] (p och q) eller (icke r)	Svar!
[b] (p eller q) och r	Svar!
[c] (p eller q) och (p och r)	Svar!

[L]2.4.2 Sanningstabeller

1. Skriv ner sanningstabeller på	
[a] p och q	Svar!
[b] icke p	Svar!
[c] p eller q	Svar!
[d] (p och q) eller r	Svar!

[e] (p eller r) och (q eller r)	Svar!
[2] Jämför dina svar på (d) och (e).	Svar!

[L]2.4.5 Ekvivalenta påståenden

Skriv, med hjälp av reglarna i avsnitt 2.4.3 och definitioner av "och" och "eller", följande på så enkelt sätt som möjligt. Om ett påstående är en tautologi, skriv att det är ekvivalent med T, en allmän tautologi. Om det är ekvivalent med en motsägelse, skriv att det är ekvivalent med M, en allmän mötsägelse.

Kontrollera, med hjälp av sanningstabeller, att dina svar är ekvivalent med de ursprungliga påståendena.

[a] (p eller q) och (q eller p)	Svar!
[b] (p och q) och q	Svar!
[c] (p eller q) och p	Svar!
[d] (p eller q) och (p och r)	Svar!
[e] ((icke p) eller p) eller q	Svar!
[f] (icke p) och (p och q)	Svar!
[g] ((icke p) och p) eller q	Svar!

[L]2.5.2 Ekvivalent

Förenkla följande påståenden. Förklara vilka lagar som du använder i varje steg. Kontrollera, med hjälp av sanningstabeller, dina svar.

[a] icke(icke (p eller q) och icke q)	Svar!
[b] icke(p och q) eller p	Svar!
[c] icke(p eller q) och p	Svar!
[d] icke((icke p och icke q) och icke r)	Svar!

[L]2.6.4 Implikation

1. Skriv ner sanningstabeller på	
----------------------------------	--

[a] (icke q) $\Rightarrow$ (icke p)	Svar!
[b] $p \Rightarrow q$	Svar!
[c] icke(p och icke q)	Svar!
2. Jämför dina svar på a-c.	Svar!

[L]2.8.1 För alla, det existerar

Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska, och skriv ner deras negation.	
[1] Det finns ett heltal större än 3.	Svar!
[2] Alla positiva heltal är större eller lika med 1.	Svar!
[3] Alla jämna tal är delbara med 4.	Svar!
[4] För varje heltal x, det finns ett heltal y så att $x > y$.	Svar!

[J] Uppgift 1.4.8 (1.4.8) [1.5.14]

Bevis:

1	Anta att $xy=0$, $x \neq 0$ och $y \neq 0$.	Antagandet
2	$x \cdot 0 = 0$	Från [J] uppgift 1.4.7 (1.4.7) [1.5.13]
3	$xy = x \cdot 0$	Båda xy och $x \cdot 0$ är lika med 0, och är därför lika med varandra.
4	$y=0$	Steg 1 och 3 och satsen i uppgiften.

[J] Uppgift 1.6.9 (1.6.9) [1.7.9]

Ledtråd

- Induktionsbas. Sätt i $n=1$.

$$VL = \frac{1}{2^2 - 1}$$

$$HL = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(1+1)} - \frac{1}{2(1+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{18}{24} - \frac{6}{24} - \frac{4}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

- Induktionssteg

- Anta att påståendet är sant för $n=1,2,\dots,k$. För $n=k$ har vi så att

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} \text{ gäller.}$$

- Visa nu att påståendet är sant för $n=k+1$, dvs visa att

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} + \frac{1}{(k+1+1)^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+1+1)} - \frac{1}{2(k+1+2)} \text{ gäller.}$$

Betrakta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} + \frac{1}{(k+1+1)^2-1} &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} + \frac{1}{(k+2)^2-1} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{k^2+4k+3} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+3)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+2)} - \frac{k+3}{2(k+1)(k+3)} + \frac{2}{2(k+1)(k+3)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+2)} - \frac{k+3-2}{2(k+1)(k+3)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+2)} - \frac{k+1}{2(k+1)(k+3)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2(k+3)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(k+1+1)} - \frac{1}{2(k+1+2)} \end{aligned}$$

- Slutsats

[J] Uppgift 1.6.19 (1.6.19) [1.7.22]

Ledtråd

- Induktionsbas. Sätt i $n=1$. $11^1 - 6 = 5$ är delbart med 5.
- Induktionssteg
 - Anta att påståendet är sant för $n=1,2,\dots,k$. Så har vi t.ex. för $n=k$ att $11^k - 6$ är delbart med 5. Vi kan skriva $11^k - 6 = 5s$ för något heltal s .
 - Betrakta $11^{k+1} - 1$.
 $11^{k+1} - 1 = 11 \cdot 11^k - 1 = 11(11^k - 1) + 11 - 1 = 11(5s) + 10 = 5(11s + 2)$, som är delbart med 5.
- Slutsats

Uppgifter från [J]5.2 (5.2) [7.2]

3 (3) [3]

Icke linjärt homogent med konstanta koefficienter eftersom koefficienten framför a_{n-1} är $2n$ som inte är konstant.

6 (6) [6]

Icke linjärt homogent med konstanta koefficienter ty det finns termen 1.

16 (15) [16]

- Lös $t^2 - 7t + 10 = 0$. Rötterna är $t = 2$ och $t = 5$.
- Så $a_n = A2^n + B5^n$, konstanter A och B.
- Bestäm, med hjälp av startvillkoren, A och B. $A = 3$ och $B = 2$.
- Lösningen är $a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n$.

20 (19) [20]

- Lös $t^2 - 6t + 9 = 0$. Rötterna är $t = -3$ (två gånger)
- Så $a_n = 3^n(A+Bn)$, konstanter A och B.
- Bestäm, med hjälp av startvillkoren, A och B.
För $n = 0$: $1 = A$, och
för $n = 1$: $1 = 3(A+B) = 3(1+B)$ så $B = -2/3$.
- Lösningen är $a_n = 3^n(1 - (2n/3)) = 3^n - 2n \cdot 3^{n-1}$.

22 (21) [22]

- Lös $9t^2 - 6t + 1 = 0$. Rötterna är $t = 1/3$ (två gånger)
- Så $a_n = (1/3)^n(A+Bn)$, konstanter A och B.
- Bestäm, med hjälp av startvillkoren, A och B.
För $n = 0$: $6 = A$, och
för $n = 1$: $5 = (1/3)(6+B) = 2 + (B/3)$, så $B = 9$.
- Lösningen är $a_n = (1/3)^n(6 + 9n)$

The author would like to thank the following for their contribution to various updates of the original manuscript:

Katharina Huber, Fredrik Ståhl, Sam Lodin and Pia Heidtmann.

© Sarah Norell
c/o [Pia Heidtmann](#)

MID SWEDEN UNIVERSITY

Department of Engineering, Physics and Mathematics

Mid Sweden University

S-851 70 SUNDSVALL

Sweden

Updated 070811