

MITTUNIVERSITETET

TFM

Modelltenta 2007

MA014G Algebra och Diskret Matematik

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 1 oktober 2007

---

*Den obligatoriska delen av denna (modell)tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. Maximalt poängantal är 24. Därutöver innehåller skrivningen en frivillig uppgift.*

*Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen.*

*Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!*

**Behandla högst en uppgift på varje papper!**

**Hjälpmedel:** Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

*LYCKA TILL!!*

---

**Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!**

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

---

### Uppgift 1 (obligatorisk)

- (a) Låt  $A, B$  och  $C$  vara delmängder av grundmängden  $\mathcal{U}$ .
- (i) Rita ett Venndiagram som visar att mängderna  $A, B$  och  $C$  delar upp  $\mathcal{U}$  i 8 disjunkta områden.
  - (ii) Markera området  $X = \overline{(A \cap B \cap C)}$  i ditt Venndiagram.
  - (iii) Visa att  $\overline{(A \cap B \cap C)} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ . [1,5p]
- (b) Ange mängden  $\{2^r + 1 : r \in \mathbb{Z} \text{ och } -3 \leq r \leq 3\}$  genom att lista elementen. [1p]
- (c) Bestäm  $|Y \times \mathcal{P}(X)|$  där  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  och  $Y = \{a, b\}$ . [0,5p]

### Uppgift 2 (obligatorisk)

- (a) Uttryck det binära talet  $(10100100001110)_2$
- (i) som ett hexadecimalt tal;
  - (ii) i basen 10. [0,5p]
- (b) Ange följande formler m.h.a. summatecken:
- (i)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ;
  - (ii)  $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . [1p]
- (c) Beräkna följande summor m.h.a. formlerna i (b).
- (i)  $\sum_{n=1}^{50} 4n$ ;
  - (ii)  $\sum_{n=3}^{50} (2n-1)^2$ . [1,5p]

### Uppgift 3 (obligatorisk)

(a) Förklara vad som menas med att en relation  $R$  på en mängd  $S$  är

- (i) reflexiv;
- (ii) symmetrisk;
- (iii) transitiv;
- (iv) antisymmetrisk.

[0,5p]

(b) Låt  $R$  vara en relation på mängden  $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  definierad av

$$(s_1, s_2) \in R \text{ om } s_1 s_2 > 0.$$

- (i) Rita digrafen för  $R$ .
- (ii) Ange om relationen  $R$  är reflexiv, symmetrisk, transitiv eller antisymmetrisk.
- (iii) Är relationen  $R$  en ekvivalensrelation?
- (iv) Är relationen  $R$  en partiell ordning?

Motivera dina svar!

[1,5p]

(c) Låt  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , och låt  $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$  vara funktionen

$$f(x) = 2x - 3.$$

- (i) Ange *definitionsmängden*, *bildmängden* och *värdeområde* till  $f$ .
- (ii) Förklara varför  $f$  inte är *surjektiv*.
- (iii) Förklara varför  $f$  är *injektiv*.
- (iv) Är  $f$  inverterbar? Motivera svaret!

[1p]

### Uppgift 4 (obligatorisk)

En talföljd  $\{u_n\}$  definieras genom rekursionsformeln

$$u_{n+1} = 2u_n + 2^n \text{ för } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

och begynnelsevillkoret  $u_0 = 1$ .

[1p]

(a) Använd rekursionsformeln för att beräkna  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  och  $u_6$ .  
Visa dina uträkningar.

(b) Bevisa med induktion att

$$u_n = 2^{n-1}(n+2) \text{ för alla } n \geq 0.$$

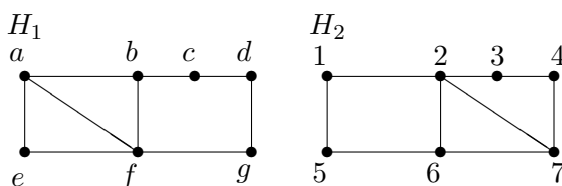
[2p]

### Uppgift 5 (obligatorisk)

- (a) Ett litet bussföretag kör buss endast mellan de sex städerna Sundsvall, Härnösand, Östersund, Örnsköldsvik, Kramfors och Hudiksvall. För varje stad, ger nedanstående tabell antalet andra städer som staden har en direktförbindelse via buss med.

| Stad               | H-vall | Hä-sand | K-fors | S-vall | Ö-vik | Ö-sund |
|--------------------|--------|---------|--------|--------|-------|--------|
| Antal förbindelser | 3      | 3       | 2      | 2      | 3     | 3      |

- (i) Förklara hur denna information om bussnätverket kan beskrivas med en *enkel graf*. Tala om vad hörnen i din modell representerar och vad det betyder att två hörn är grannar i modellen.
- (ii) Beräkna hur många par av städer som har en direkt bussförbindelse mellan dem. Ge en kort beskrivning av din metod. [1p]
- (b) Är det möjligt att konstruera en enkel graf med sex hörn med valens 2, 2, 2, 3, 3, 3? Konstruera ett exempel på en sådan graf eller tala om varför en sådan konstruktion är omöjlig. [0,5p]
- (c) (i) Definiera vad som menas med att två enkla grafer är *isomorfa*.
- (ii) Visa att graferna  $H_1$  och  $H_2$  nedan *inte* är isomorfa. [1,5p]



## Uppgift 6 (obligatorisk)

- (a) Låt  $G$  vara grafen med hörnmängd  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  och grannmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

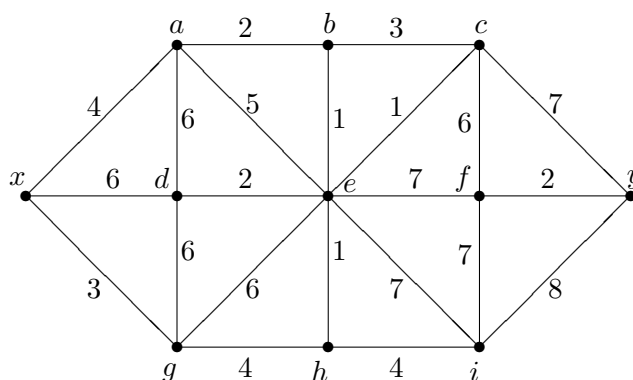
- (i) Rita  $G$ .
- (ii) Är  $G$  *bipartit*?
- (iii) Är  $G$  *Eulersk*?
- (iv) Är  $G$  *Hamiltonsk*?

Motivera dina svar!

[1,5p]

- (b) Använd *Dijkstras algoritm* för att bestämma kortaste väg från hörn  $x$  till hörn  $y$  i följande viktade graf. Ange också kortaste vägens längd. Redovisa gången i lösningen.

[1,5p]



### Uppgift 7 (obligatorisk)

- (a) Ange (utan härledning) *Divisionsalgoritmen* när ett heltal  $a$  delas med ett positivt heltal  $n$ . [0,5p]
- (b) Ange den enligt Divisionsalgoritmen bestämda kvoten och resten för
- (i)  $a = 100$  och  $n = 9$ ;
  - (ii)  $a = -100$  och  $n = 9$ . [0,5p]
- (c) Låt  $a$ ,  $b$  och  $n$  vara heltal där  $n \geq 2$ .
- (i) Definiera vad som menas med att  $a \equiv b \pmod{n}$ .
  - (ii) Visa att om  $a \equiv b \pmod{n}$ , så ger  $a$  och  $b$  samma rest när de delas med  $n$  enligt Divisionsalgoritmen. [0,75p]
- (d) (i) Ange de 5 kongruensklasserna för kongruensrelationen  $a \equiv b \pmod{5}$  på  $\mathbb{Z}$ .
- (ii) Beskriv mängden  $\mathbb{Z}_5$ .
  - (iii) Ange additionstabellen för  $\mathbb{Z}_5$ .
  - (iv) Ange multiplikationstabellen för  $\mathbb{Z}_5$ . [1,25p]

### Uppgift 8 (obligatorisk)

- (a) Använd *Euklides algoritmen* för att visa att det finns heltal  $s$  och  $t$  sådana att

$$72s + 114t = 6.$$

[1,5p]

- (b) Bestäm alla heltalslösningar  $x$  till kongruensen

$$72x \equiv 2 \pmod{114}.$$

Visa dina uträkningar.

[0,5p]

- (c) Bestäm alla heltalslösningar  $x$  till kongruensen

$$72x \equiv 6 \pmod{114}.$$

Visa dina uträkningar.

[0,5p]

- (d) Bestäm alla lösningar  $[x] \in \mathbb{Z}_{114}$  till ekvationen

$$[72] \odot [x] = [6].$$

Visa dina uträkningar.

[0,5p]

### Uppgift 9 (FRIVILLIG)

Låt  $n$  och  $k$  vara heltal där  $0 \leq k \leq n$ .  
Symbolen

$$C(n, k) \quad \text{eller} \quad \binom{n}{k}$$

står för antalet  $k$ -kombinationer ur en mängd med  $n$  element.

(a) Förklara vad som menas med en “ $k$ -kombination ur en mängd med  $n$  element”.

(b) Förklara varför

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{för } 0 \leq k \leq n.$$

(c) Förklara varför

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{för } 0 \leq k \leq n.$$

(d) Motivera formeln

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad \text{för } 0 \leq k \leq n.$$

Du kan välja mellan två sätt att göra detta på:

- (i) Du kan göra ett kombinatoriskt resonemang, dvs. du gör ett tydligt resonemang som konstaterar att de båda sidorna i likheten räknar samma sak men på olika sätt.
- (ii) Du kan göra ett algebraiskt resonemang med hjälp av formeln i (b).

Välj det sätt som du föredrar.