Mitthögskolan
Institutionen för Teknik, Fysik och Matematik
Sam Lodin

Tentamen i matematik.
Algebra och diskret matematik (MAAA99), 5p.
Sundsvall 2003-10-30
Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Icke formelhanterande miniräknare, samt godkänd gymnasieformelsamling.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.
Betyget sätts enligt följande: För godkänt krävs 22 poäng, för väl godkänt krävs 36 poäng.

1. *a)* Visa med hjälp av Venndiagram, eller på annat sätt, att
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
(1p)

   b) Antalet element $|A \cup B|$ i mängden $A \cup B$ ges av $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Generalisera detta resultat till mängden $|A \cup B \cup C|$ d.v.s. skriv motsvarande uttryck för $|A \cup B \cup C|$. (2p)

   c) Ange mängden $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ med hjälp av inklusionsregler. (1p)

2. *a)* Låt a, b vara heltal. Bevisa att $a + b$ är udda om och endast om enbart en av a eller b är udda. (2p)

   b) Bevisa eller motbevisa påståendet: Alla primtal är udda. (2p)

   c) Bevisa eller motbevisa påståendet: Det existerar ett heltal k så att $k, k + 2$ och $k + 4$ alla är primtal. (2p)

3. *a)* Uttryck det decimala talet 327 hexadecimalt och binärt. (1*p*)

b) Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{50}(3k+2).$$

(1*p*)

c) Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{1000}(-1)^k.$$

(1*p*)

d) En talföljd $\{u_n\}$ definieras genom rekursionsformeln $u_{n+1} = 2u_n + 3n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ och $u_1 = 1$. Beräkna u_2, u_3, u_4 och u_5. (1*p*)

4. Lös rekursionsformlerna

a) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$ med $u_0 = 0$ och $u_1 = 2$, (2*p*)

b) $u_{n+2} - 8u_{n+1} + 16u_n = 0$ med $u_0 = 10$ och $u_1 = 20$. (2*p*)

5. *a)* Hitta den multiplikativa inversen till 5 i $\mathbb{Z}_{17}$. (2*p*)

b) Skriv upp multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_5$. (1*p*)

c) Vilka tal i $\mathbb{Z}_p$ har en multiplikativ invers? (1*p*)

6. Visa med hjälp av induktion att för alla positiva heltal n gäller att

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(6*p*)

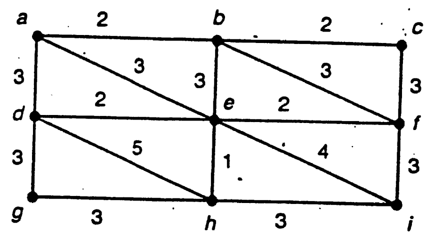
7. *a)* Hitta största gemensamma delaren till 23 och 28. (2*p*)

b) Hitta två tal $s, t \in \mathbb{Z}$ som uppfyller $s > 0$ och $t < 0$ så att $23 \cdot s + 28 \cdot t = 1$. (1*p*)

c) Hitta två tal $s, t \in \mathbb{Z}$ som uppfyller $s < 0$ och $t > 0$ så att $23 \cdot s + 28 \cdot t = 1$. (1*p*)

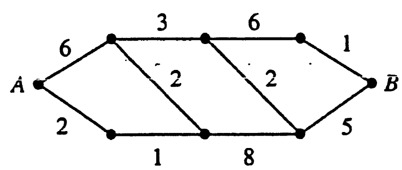
8. R är en relation på $\mathbb{Z}_+$ definierad av att aRb om $a|b$. Avgör om relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk eller transitiv. Är relationen en ekvivalensrelation eller en partiell ordning? (6p) ($\mathbb{Z}_+$ är de positiva heltalen.)

9. Använd Prim's eller Kruskal's algoritm för att hitta ett minsta uppspännande träd, (minimal spanning tree), i följande graf.



(4p)

10. Använd Dijkstra's algoritm för att hitta en kortaste stig mellan A och B i grafen nedan.

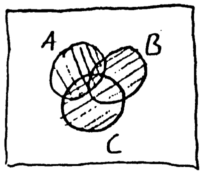


(6p)

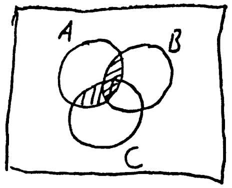
Lycka till.

Lösningsförslag Algebra och diskret matematik (MAAA99)
2003-10-30

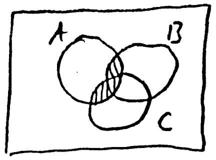
1. a)



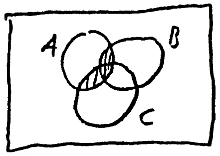
/// $B \cup C$
\\\ A



/// $B \cap C$
/// $A \cap C$



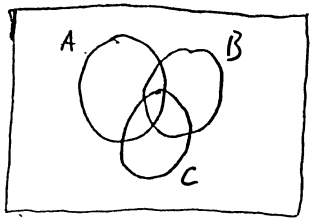
$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Uttrycken har samma Venndiagram så de är lika.

b)



Antalet element $|A \cup B \cup C|$ i mängden $A \cup B \cup C$ fås om vi adderar antalet element i A, B och C och noterar att vi då räknar elementen i $A \cap B$, $A \cap C$ och $B \cap C$ minst två gånger. Vi drar därför bort antalet element i dessa och ser att vi då inte får med elementen i $A \cap B \cap C$ som därför måste läggas till, d.v.s.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

c)

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = \{2k : k \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}$$

2. a) Låt a, b vara heltal.

Visar först att om en av a och b är udda så är $a+b$ udda.

Antag att a udda och b jämn, d.v.s.

$a = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad b = 2l$ $l \in \mathbb{Z}$

$a+b = 2k+1+2l = 2(k+l)+1$ så $a+b$ är udda

Om b udda och a jämn följer på samma sätt att $a+b$ är udda.

Visar nu att om $a+b$ är udda så är en av a eller b udda genom det kontrapositiva påståendet;

Om både a och b är udda eller om både a och b är jämna så är $a+b$ jämnt.

Antag att både a och b är udda d.v.s.

$a = 2k+1$ $k \in \mathbb{Z}$ $\quad b = 2l+1$ $l \in \mathbb{Z}$

$a+b = 2k+1+2l+1 = 2(k+l+1)$ så $a+b$ är jämnt.

Om a och b är jämna har vi $a = 2k$ $k \in \mathbb{Z}$ $b = 2l$ $l \in \mathbb{Z}$

$a+b = 2k+2l = 2(k+l)$ så $a+b$ är jämnt.

Vi har visat att $a+b$ är udda omm endast en av a eller b är udda.

b) Eftersom 2 är ett primtal och jämnt är påståendet falskt.

c) $k=3$ ger $k+2=5$ och $k+4=7$.

3, 5 och 7 är alla primtal så påståendet är sant.

3. a)

Uttrycker först 327_{10} binärt

	kvot	rest
327/2	163	1
163/2	81	1
81/2	40	1
40/2	20	0
20/2	10	0
10/2	5	0
5/2	2	1
2/2	1	0
1/2	0	1

$$327_{10} = 101000111_2$$

$$1,0100,0111_2 = 147_{16}$$

Svar: $327_{10} = 101000111_2 = 147_{16}$

b)

Eftersom summan är en aritmetisk summa får vi

$$\sum_{k=1}^{50}(3k+2) = \frac{(5+152)\cdot 50}{2} = 157\cdot 25 = 3925.$$

c)

$$\sum_{k=1}^{1000}(-1)^k = \sum_{k=1}^{500}(-1) + \sum_{k=1}^{500} 1 = 0$$

d)

$u_1 = 1$

$u_2 = 2u_1 + 3\cdot 1 = 2 + 3 = 5$

$u_3 = 2\cdot u_2 + 3\cdot 2 = 10 + 6 = 16$

$u_4 = 2\cdot u_3 + 3\cdot 3 = 32 + 9 = 41$

$u_5 = 2\cdot u_4 + 3\cdot 4 = 82 + 12 = 94$

4. a)

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \qquad u_0 = 0 \text{ och } u_1 = 2$$

Karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

rötterna är $r = 3$ och $r = 2$

Allmänna lösningen blir

$$u_n = A\,3^n + B\cdot 2^n$$

$n=0$ ger $A + B = u_0 = 0$ (1)

$n=1$ ger $3A + 2B = u_1 = 2$ (2)

(2) − 2(1) : $3A + 2B - 2A - 2B = 2 - 0$

$A = 2$ och därmed ger (1) att $B = -2$

Svar: $u_n = 2\cdot 3^n - 2\cdot 2^n \qquad n \geq 0$

b)

$$u_{n+2} - 8u_{n+1} + 16u_n = 0 \qquad u_0 = 10 \quad u_1 = 20$$

Karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

$$r = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4 \qquad \text{Dubbelrot}$$

Allmänna lösningen blir

$$u_n = (An + B)4^n$$

$n=0$ ger $B = u_0 = 10$

$n=1$ ger $(A+B)\cdot 4 = u_1 = 20 \Leftrightarrow A+B = 5$ så $A = -5$

Svar: $u_n = (10 - 5n)\cdot 4^n \qquad n \geq 0$

a)

Den multiplikativa inversen x till 5 i $\mathbb{Z}_{17}$ ges av

$$[x]_{17}[5]_{17} = [1]_{17}$$

dv.s.

$$5x + k\cdot 17 = 1 \quad (*)$$

Söker $\operatorname{sgd}(5,17)$ m.h.a Euklides algoritm

$17 = 3\cdot 5 + 2$
$5 = 2\cdot 2 + 1$
$2 = 2\cdot 1$

Euklides baklänges ger

$$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2(17 - 3\cdot 5) =$$
$$= 7\cdot 5 - 2\cdot 17$$

med $x = 7$ och $k = -2$ löser vi $(*)$

Så inversen till 5 i $\mathbb{Z}_{17}$ är 7.

b)

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_5$

c)

Om p är ett heltal så har ett tal x i $\mathbb{Z}_p$ en multiplikativ invers om x är relativt prim med p

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ $*$ för $n \in \mathbb{Z}$ $n \geq 1$

I Visar att $*$ är sant för $n=1$

$$VL = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$HL = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$VL = HL$ så $*$ sant för $n=1$

II Antag att $*$ är sant för $n = p$ $p \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1} \quad **$$

Visar att $*$ är sant för $n = p+1$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = [\text{enligt } **] =$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2} =$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)+1}$$

Så $*$ är sant för $n = p+1$

Enligt induktionsaxiomet ger I och II att $*$ är sant för alla positiva heltal $n \geq 1$

7) $\mathrm{sgd}(23, 28)$ Euklides algoritm ger

$28 = 1\cdot 23 + 5$
$23 = 4\cdot 5 + 3$
$5 = 1\cdot 3 + 2$
$3 = 1\cdot 2 + 1$
$2 = 2\cdot 1$

sista nollskilda resten är 1

Så $\mathrm{sgd}(23,28)=1$

b) Euklides algoritm baklänges ger

$1 = 3 - 1\cdot 2 = 3-(5-3) = 2\cdot 3 - 5 =$
$= 2(23 - 4\cdot 5) - 5 = 2\cdot 23 - 9\cdot 5 =$
$= 2\cdot 23 - 9(28-23) = 11\cdot 23 - 9\cdot 28$

så med $s=11$ och $t=-9$ är $s>0$ $t<0$
och $23 s + 28\cdot t = 1$

c) Betrakta $11\cdot 23 - 9\cdot 28 = 1$
addera $-28\cdot 23 + 23\cdot 28 = 0$
Detta ger $-17\cdot 23 + 14\cdot 28 = 1$
så med $s=-17$ och $t=14$ är $s<0$ $t>0$
och $23\cdot s + 28\cdot t = 1$

8. R relation på $\mathbb{Z}_+$ definierad av att aRb om $a|b$

Reflexivitet: Eftersom $a|a$ för alla $a\in\mathbb{Z}_+$ är relationen reflexiv

Symmetri: Relationen är inte symmetrisk eftersom tex $2|4$ men $4\nmid 2$

antisymmetri: Antag att $a|b$ och $b|a$, d.v.s. aRb och bRa.
Att $a|b$ innebär att $b=k\cdot a$ $k\in\mathbb{Z}_+$
Att $b|a$ innebär att $a = l\cdot b$ $l\in\mathbb{Z}_+$

Så $b = k\cdot l\cdot b$ dvs $k\cdot l = 1$ vilket medför att $k=1$ och $l=1$ så $a=b$

Relationen är alltså antisymmetrisk

Transitivitet: Antag att $a|b$ och $b|c$, d.v.s. aRb och bRc.
Då gäller att $b = k\cdot a$ $k\in\mathbb{Z}_+$ och $c = l\cdot b$ $k\in\mathbb{Z}_+$
$c = l\cdot b = l\cdot k\cdot a = m\cdot a$ $m = k\cdot l\in\mathbb{Z}_+$
Så $a|c$. Alltså aRc

Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv så den är en partiell ordning

Eftersom den inte är symmetrisk är den ingen ekvivalensrelation.

7.

Använder Prim's algoritm
Delar i hörnen i mängderna av besökta och obesökta hörn. Låter förstalla hörnen ingå i mängden av obesökta hörn $\bar{S}$. Väljer ett hörn och flyttar över det till mängden av besökta hörn S

* Letar reda på kortaste kanten som inte ger en cykel mellan hörn i S och $\bar{S}$. Lägger till kanten till trädet och flyttar motsvarande hörn från $\bar{S}$ till S.
repeterar från * tills alla hörn är i S.

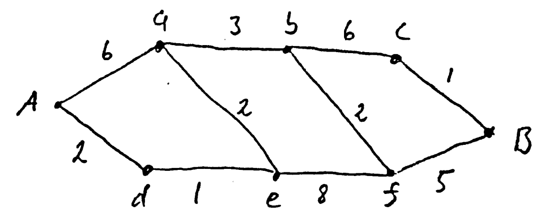
	S	$\bar{S}$
	$\emptyset$	$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$
Välj hörn a,	$\{a\}$	$\{b,c,d,e,f,g,h,i\}$
Välj kant (a,b)	$\{a,b\}$	$\{c,d,e,f,g,h,i\}$
Välj kant (b,c)	$\{a,b,c\}$	$\{d,e,f,g,h,i\}$
Välj kant (a,d)	$\{a,b,c,d\}$	$\{e,f,g,h,i\}$
Välj kant (d,e)	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{f,g,h,i\}$
Välj kant (e,h)	$\{a,b,c,d,e,h\}$	$\{f,g,i\}$
Välj kant (e,f)	$\{a,b,c,d,e,f,h\}$	$\{g,i\}$
Välj kant (d,g)	$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$	$\{i\}$
Välj kant (f,i)	$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$	$\emptyset$

Trädet består av kanterna

(a,b), (b,c), (a,d), (d,e), (e,h), (e,f), (d,g), (f,i)

Trädet är av vikt $2+2+3+2+1+2+3+3=18$

10.



Kortaste väg från A

Fixerar hörn	A	a	b	c	d	e	f	B	Lägger till kant
A	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
d		6	∞	∞	2	∞	∞	∞	(A,d)
e		6	∞	∞		3	∞	∞	(d,e)
a		5	∞	∞			11	∞	(e,a)
b			8	∞			11	∞	(a,b)
f				14			10	∞	(b,f)
c				14				15	(b,c)
B								15	(c,B) ← obs ej entydigt val kan välja (f,B)

En kortaste stig är A d e a b c B

av vikt $2+1+2+3+6+1=15$