Mitthögskolan
Institutionen för Teknik, Fysik och Matematik
Sam Lodin

Tentamen i matematik.
Algebra och diskret matematik (MAAA99), 5p.
Sundsvall 2004-01-09
Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Icke formelhanterande miniräknare, samt godkänd gymnasieformelsamling.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga att de blir svåra att följa. En uppgift per blad, skriv endast på en sida.

Betyget sätts enligt följande: För godkänt krävs 22 poäng, för väl godkänt krävs 36 poäng.

1. (a) En grupp på 200 personer åker på safari i Afrika. De markerar om de ser elefanter, giraffer och lejon. Efter resan har 120 åtminstone sett elefanter, (de har alltså möjligen sett de andra djuren), 85 åtminstone sett giraffer och 35 åtminstone sett lejon. Dessutom ser de att 40 har sett åtminstone giraffer och elefanter, 30 har sett åtminstone lejon och elefanter, 13 har sett åtminstone lejon och giraffer. Vidare gäller att 10 har haft den stora lyckan att se giraffer, lejon och elefanter. Hur många har inte fått se något av de tre djuren? (2*p*)

   (b) Hur förhåller sig mängderna A och B till varandra om
   (i) $A \cap B = A$,
   (ii) $A \cup B = A$. (2*p*)

   (c) Avgör om $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$, för alla mängder X och Y. (2*p*)

2. (a) Uttryck det hexadecimala talet $B72F$ i basen 10 samt binärt. (2*p*)

   (b) Beräkna summan

$$\sum_{i=1}^{150} (3k + 2)$$

(2*p*)

3. Låt $X = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$. Definiera en relation R på X genom xRy om $4|x - y$.
   (a) Visa att R är en ekvivalensrelation. (4p)
   (b) Ange ekvivalensklasserna. (1p)

4. (a) Hur många 8-bitarssträngar innehåller exakt 3 ettor? (1p)
   (b) Hur många 8-bitarssträngar börjar med 0 och slutar med 110? (1p)
   (c) Hur många "ord" med åtta bokstäver kan fås ur ordet ILLINOIS? (1p)
   (d) Hur många "ord" med åtta bokstäver kan fås ur ordet ILLINOIS, om något I måste stå före något L i ordet? (1p)

5. Låt $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Låt f vara en funktion från X till X definierad genom $f(x) = 4x \bmod 5$.
   (a) Rita digrafen för f. (1p)
   (b) Är f injektiv (1-1, one to one)? (1p)
   (c) Är f surjektiv (på, onto)? (1p)

6. Använd induktion för att visa att $n! \geq 2^{n-1}$ för alla heltal $n \geq 1$. (6p)

7. (a) Låt $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ med $c = \mathrm{sgd(a, b)}$. Bevisa att c^2 delar ab.(1p)
   (b) Visa att för alla positiva reella tal x, y gäller att om $xy > 25$ så är $x > 5$ eller $y > 5$. (2p)
   (c) Konstruera sanningstabellen för påståendet

$$(p \to q) \wedge (\neg p \to r).$$

(1p)

8. (a) Finn inversen till 23 i $\mathbb{Z}_{72}$. (2p)
   (b) Lös kongruensekvationen $23x \equiv 3 (\bmod\ 72)$. (1p)
   (c) Har kongruensekvationen $36x \equiv 3 (\bmod\ 72)$ någon lösning? Om den har det ange en, om inte ange varför. (1p)

9. (a) Låt talföljden $\{a_n\}$ definieras av

$$a_{n+1} = 3a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{och} \quad \mathrm{a}_0 = 5.$$

   Beräkna a_1, a_2 och a_3. Generalisera och ge en formel för a_n. (2p)
   (b) Lös rekursionsformeln

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad n \geq 2,$$

   med $a_0 = 1$ och $a_1 = 3$. (2p)

10. Låt grafen G ges av grannmatrisen (adjacency matrix)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

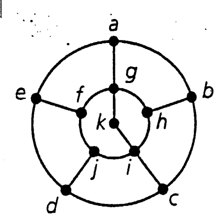
Låt vidare grafen H ges av hörn-kant matrisen (vertice edge incidence matrix), (rad anger hörn och kolumn anger kant)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

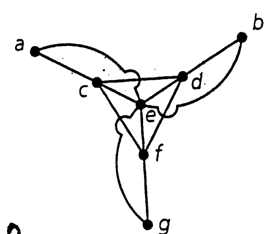
(a) Rita graferna G och H. (2p)

(b) Avgör om G och H är isomorfa. Om G och H är isomorfa ange en isomorfi (genom att namnge hörnen), om inte ange varför. (2p)

11. Avgör om graferna A och B nedan har en Eulercykel och/eller en Hamiltoncykel. Om en graf har en cykel av någon typ ange den, om grafen inte har en cykel av någon av typerna tala om varför.



A



B

(4p)

Lycka till.

Lösningsförslag
Algebra och diskret matematik 5p 2004-01-09

1.

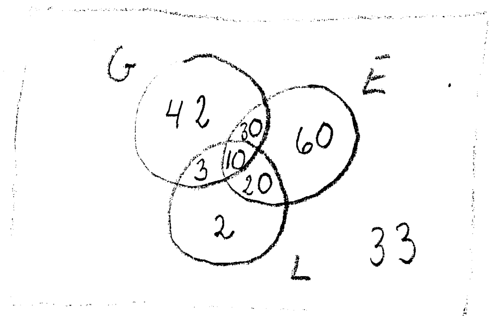
a)

G mängden av de personer som sett giraffer

E mängden av de personer som sett elefanter

L mängden av de personer som sett lejon.

Enligt informationen i uppgiften får vi följande diagram



Det är alltså 33 personer som inte sett något av djuren.

b) (i) $A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$

Detta medför att om $A \cap B = A$ så innehåller B alla element som finns i A

d.v.s. $A \subseteq B$

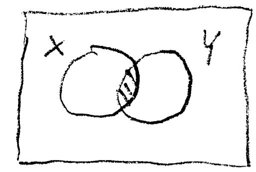
(ii) $A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$

Eftersom $A \cup B = A$ kan inte B innehålla några element som inte finns i A, eller omvänt alla element i B måste finnas i A d.v.s. $B \subseteq A$

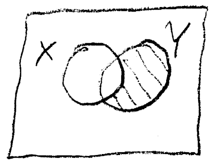
1. c)

Betrakta följande Venndiagram

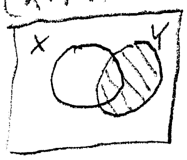
$X \cap Y$



$Y - X$



$(X \cap Y) \cup (Y - X)$



Eftersom mängderna X och Y är godtyckliga så gäller i allmänhet inte att $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$

T.ex. Låt $X = \{3\}$ $Y = \{2, 3\}$

Då är $(X \cap Y) \cup (Y - X) = \{3\} \cup \{2\} = \{2,3\} \neq X$

2 a)

$$B72F_{16} = 11 \cdot 16^3 + 7 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 =$$
$$= 46895$$

$$B72F_{16} = 1011\,0111\,0010\,1111_2$$

b)

$$\sum_{i=1}^{150} (3k+2) = 150(3k+2)$$

3. a) $X = \{0, 1, 2, \dots 11\}$ $\quad xRy \quad 4 \mid x-y$

Reflexiv: För varje element $x \in X$ gäller $x - x = 0$

så $4 \mid x - x$ och xRx. Relationen är reflexiv

Symmetrisk: Tag $x, y \in X$ så att xRy, då gäller

att $4 \mid x-y$ och därmed $x - y = 4k$ för något $k \in \mathbb{Z}$

$x - y = 4k \iff y - x = -4k = 4l$ för något $l \in \mathbb{Z}$

så $4 \mid y - x$ och yRx.

Relationen är symmetrisk

Transitiv: Tag $x, y, z \in X$ så att xRy och yRz

Att xRy ger $4 \mid x - y$ eller $x - y = 4k$ för något $k \in \mathbb{Z}$

Att yRz ger $4 \mid y - z$ eller $y - z = 4l$ för något $l \in \mathbb{Z}$

$x - z = x - y + y - z = 4k + 4l = 4(k + l)$ så

$4 \mid x - z$ d.v.s. xRz

Relationen är transitiv

Eftersom relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv är den en ekvivalensrelation.

b) Ekvivalensklasserna blir

$[0] = \{0, 4, 8\}$

$[1] = \{1, 5, 9\}$

$[2] = \{2, 6, 10\}$

$[3] = \{3, 7, 11\}$

4.

a)

I en 8-bitars sträng med exakt 3 ettor har vi också exakt 5 nollor. Vi skall välja ut 3 positioner av 8 att placera ut ettor i och i resten skall det vara nollor.

Det finns alltså $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ strängar med exakt 3 ettor.

b)

Om en 8 bitars sträng börjar på 0 och slutar med 110, finns det fyra positioner där vi har två val för varje position.

Det finns $2^4 = 16$ strängar som börjar på 0 och slutar med 110.

c)

I ordet ILLINOIS finns två L och tre I

Antalet olika ord med åtta bokstäver blir

$$\frac{8!}{2!\,3!} = 3360.$$

d)

Enda möjligheten att inte få ett I före något L är om båda L'en är före de tre I'na, LLIII

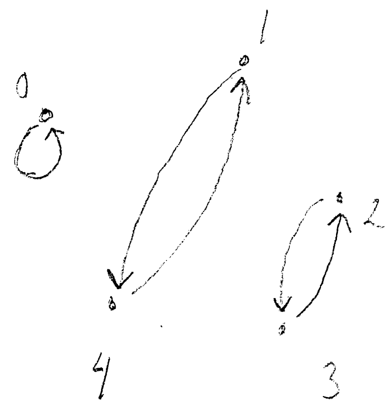
Vi väljer ut fem av åtta positioner där vi placerar LLIII i denna ordning. De övriga tre bokstäverna kan sedan placeras i de övriga positionerna.

Vi får $\binom{8}{5} \cdot 3!$ olika ord där inget I står före något L. De ord där något I står före något L är $3360 - \binom{8}{5} \cdot 3!$

5

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $f(x) = 4x \mod 5$

a)



Digrafen för f

b)

I digrafen ser vi att varje element i värdemängden för f motsvaras av endast ett element i definitionsmängden för f så f är injektiv

c) Ur digrafen ser vi också att värdemängden för f är hela X så f är surjektiv.

6. Skall visa att (*) $n! \geq 2^{n-1}$ för alla heltal $n \geq 1$

I Visar att (*) sann för $n = 1$

$VL = 1! = 1$ $HL = 2^{1-1} = 1$ och eftersom $1 \geq 1$ är (*) sann för $n = 1$

II Antag att (*) sann för $n = p$, $p \geq 1$

d.v.s. $p! \geq 2^{p-1}$ (**)

Visar att (*) då också är sann för $n = p+1$

$(p+1)! = (p+1)\,p! \geq [\text{enligt } (**)] \geq (p+1) \cdot 2^{p-1} \geq \left[\begin{matrix}\text{eftersom} \\ p \geq 1\end{matrix}\right] \geq$

$\geq 2 \cdot 2^{p-1} = 2^{(p+1)-1}$; så (*) sann för $n = p+1$

III Enligt induktionsaxiomet ger I och II att (*) är sann för alla heltal $n \geq 1$.

Att $c = sgd(a,b)$ medför att $c|a$ och $c|b$ så

$a = ck$ och $b = cl$ för något $k,l \in \mathbb{Z}$

$a \cdot b = c \cdot k \cdot c \cdot l = c^2 \cdot kl$ vilket innebär att $c^2 | ab$

b) Låt x och y vara positiva reella tal.

Om $xy > 25$ så är $x > 5$ eller $y > 5$.

Det kontrapositiva påståendet är

Om $x \leq 5$ och $y \leq 5$ så är $x \cdot y \leq 25$.

Bevis (kontrapositivt)

Antag att $x \leq 5$ och $y \leq 5$ då har vi

$x \cdot y \leq 5 \cdot 5 = 25$

c)

p	q	r	$p \to q$	$\neg p \to r$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
F	F	F	S	F	F
F	F	S	S	S	S
F	S	F	S	F	F
F	S	S	S	S	S
S	F	F	F	S	F
S	F	S	F	S	F
S	S	F	S	S	S
S	S	S	S	S	S

8.

a) För att hitta inversen till 23 i $\mathbb{Z}_{72}$ löser vi ekvationen

$$23 \cdot x \equiv 1 \pmod{72} \quad \text{dvs} \quad 23x + 72k = 1$$

Euklides algoritm ger sgd(23, 72)

$$72 = 3 \cdot 23 + 3$$
$$23 = 7 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

så $\mathrm{sgd}(23,72) = 1$ och vi har en lösning till $23x + 72k = 1$

Denna lösning fås om vi gör Euklides baklänges.

$$1 = 3 - 2 = 3 - (23 - 7 \cdot 3) = 8 \cdot 3 - 23 = 8(72 - 3 \cdot 23) - 23 =$$
$$= 8 \cdot 72 - 25 \cdot 23$$

så $x = -25$ och $k = 8$ löser $23x + 72k = 1$

Eftersom $-25 \equiv 47 \pmod{72}$ blir inversen till 23 i $\mathbb{Z}_{72}$, 47

b) Ifrån a) får vi

$$23(-25) + 72 \cdot 8 = 1 \quad \text{så}$$
$$23(-75) + 72 \cdot 24 = 3$$

dvs. $x = -75 + k \cdot 72$, $k \in \mathbb{Z}$ löser $23x \equiv 3 \pmod{72}$

c) Kongruensekvationen $36x \equiv 3 \pmod{72}$ saknar lösning, eftersom $\mathrm{sgd}(72,36) = 36$ och $36 \nmid 3$.

9. a)

$$a_{n+1} = 3a_n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 5$$

$$a_1 = 3a_0 = 3 \cdot 5 = 15$$

$$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 135$$

$$\vdots$$

$$a_n = 3^n \cdot 5$$

Svar: $a_1 = 15$, $a_2 = 45$, $a_3 = 135$, $a_n = 3^n 5$

b)

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \; n \geq 2 \qquad a_0 = 1, \; a_1 = 3$$

Karakteristiska ekvationen blir

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$t = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Rötterna blir $t = 6$ och $t = -1$

Den allmänna lösningen blir

$$a_n = A \cdot 6^n + B(-1)^n$$

$n = 0$: $a_0 = A + B = 1$

$n = 1$: $a_1 = 6A - B = 3$

$a_0 + a_1$ ger $7A = 4$ $A = \frac{4}{7}$ och vi får $B = 1 - A = \frac{3}{7}$

Lösningen blir

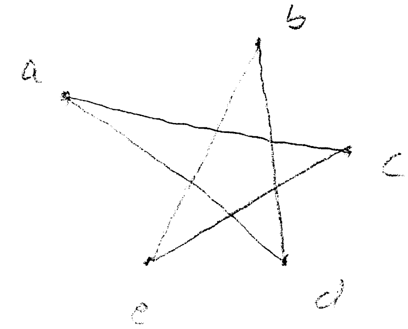
$$a_n = \frac{4}{7} \cdot 6^n + \frac{3}{7} \cdot (-1)^n \quad , n \geq 0$$

10

a) Grannmatrisen för G

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

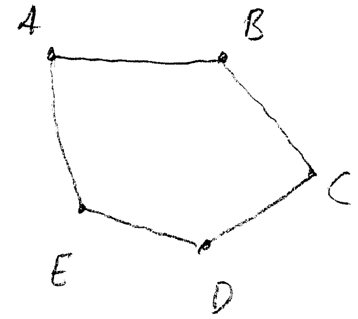
ger grafen G



Hörnkantmatrisen för H

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ger grafen H



b) Graferna G och H är isomorfa, en isomorfi ges t.ex av $f: G \to H$ given av

$f(a) = A \quad f(c) = B \quad f(e) = C \quad f(b) = D \quad f(d) = E$

11. Grafen A saknar Eulercykel eftersom det finns hörn av udda gradtal t.ex. hörnet a.

Grafen A har en Hamiltoncykel t.ex $\{a,e,f,j,d,c,i,k,g,h,b,a\}$

Graf B har en Eulercykel eftersom alla hörn har jämt gradtal. En Eulercykel ges t.ex av $\{e,a,c,d,f,c,e,d,b,e,f,g,e\}$

Graf B saknar Hamiltoncykel eftersom för att besöka hörnen a, b och c måste kanterna ae, be och ge användas, vilket medför att vi måste besöka hörn e mer än en gång.