Tentamen i Algebra och diskret matematik, 5p, 2004-10-29

Skrivtid: 5 timmar.
Hjälpmedel: TEFYMA, Gymnasieskolans formelsamling och egen (ej symbolhanterande) räknedosa.
Lärare: Sam Lodin, Mikael Torenfält.
Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Varje uppgift ger högst 3 poäng.
Maximalt poängantal är 24. 10-17 poäng ger G, 18-24 poäng ger VG.

1. a) Lille Sam, 3 år, har ibland svårt att somna. För att somna brukar han räkna får som hoppar över hagar. Eftersom Sam bara är 3 år kan han bara räkna till 20, så han somnar när han har räknat 20 får. För att få lite omväxling i sitt räknande har han infört tre hagar som de 20 fåren kan hoppa över. På hur många sätt kan fåren hoppa över de tre hagarna om fåren är numrerade från 1 till 20 och alltid hoppar i nummerordning? (1,5p)

   b) I en grupp om 14 personer ska man välja en kommitté bestående av 5 personer. Algot och Georg ställer som villkor att om en av dem väljs så ska båda väljas. På hur många olika sätt kan då kommittén väljas?. (1,5p)

2. Är det sant att för alla mängder A, B och C gäller

   a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$? (1p)

   b) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$? (1p)

   c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$? (1p)

   Bevisa eller ge motexempel.

3. Disa och Mats lider av spe(ku)l(ations)beroende. Av sin internetmäklare får de rådet att investera i de båda börsbolagen Biofantos och Euklidia (som denna månad får handlas courtagefritt). De satsar tillsammans alla sina pengar, 11879 kronor. Inköpskurserna blir 126 kr resp 343 kr. Hur många aktier av vardera slaget köper de?

4. Låt P vara en relation på $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$ given av

   $(a,b)\ \mathrm{P}\ (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c$

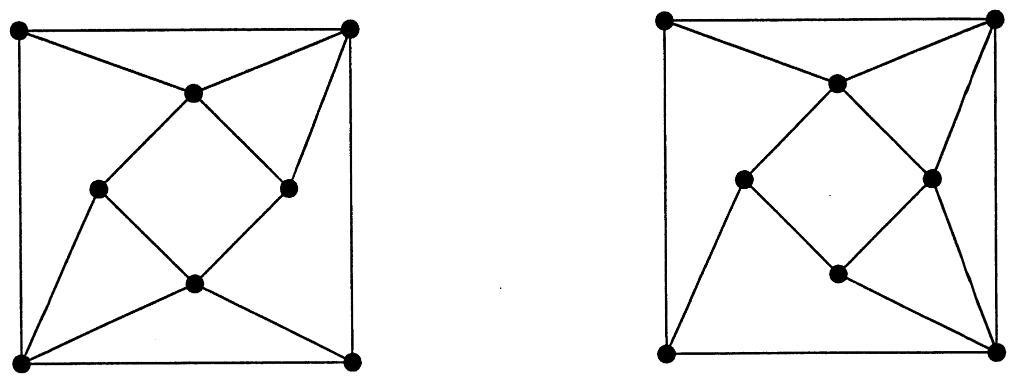
   Visa att P är en ekvivalensrelation. ($\mathbf{Z}_+$ är som bekant mängden av positiva heltal.)

5. Visa att det för alla positiva heltal n gäller att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

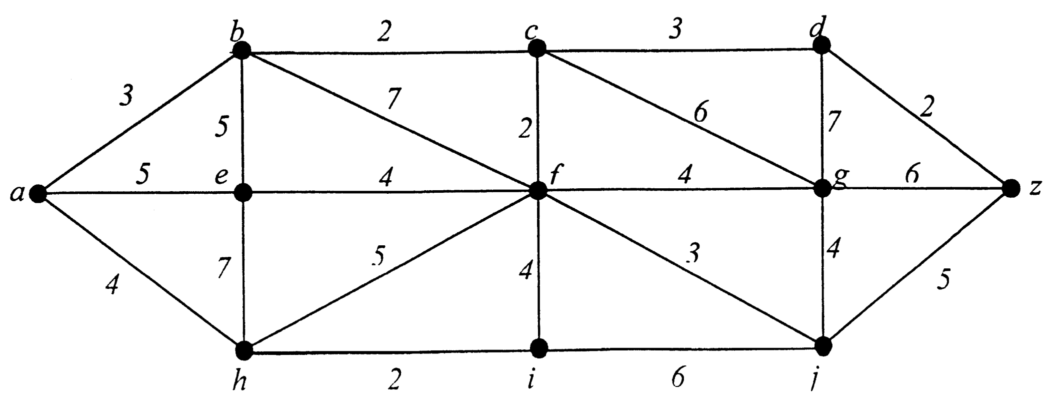
6. Lös differensekvationen $\begin{cases} x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0, & n = 2,3,4,\ldots \\ x_0 = 0, \; x_1 = 1 \end{cases}$

Kontrollera sedan din lösning genom att med två olika metoder beräkna x_2, x_3 och x_4.

7. Är nedanstående två grafer isomorfa?



8. Bestäm (med Dijkstras algoritm) kortaste vägen från a till z i nedanstående viktade graf.



Lösningsförslag

Tentamen i Algebra och diskret matematik 5p
2004-10-29

1 a) Eftersom det är 20 får och varje får har tre val, blir det totala antalet sätt 3^{20}

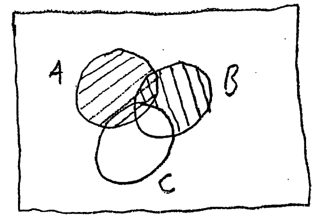
b) De fall som kan uppkomma är
I: kommitté med Algot och Georg
II: kommitté utan Algot och Georg

I fall I fattas 3 personer till kommittén. Dessa skall väljas av 12 kvarvarande personer, d.v.s. $\binom{12}{3}$ olika val.

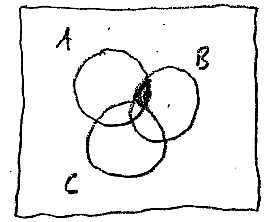
I fall II fattas 5 personer till kommittén. Algot och Georg får inte väljas, så det finns 12 personer att välja bland. Vi får alltså $\binom{12}{5}$ olika val

Totalt har vi $\binom{12}{3}+\binom{12}{5} = 220 + 792 = 1012$ olika sätt att välja kommitté.

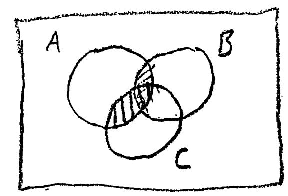
2. a)



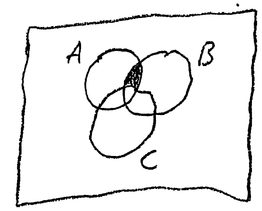
Området markerat med ⋇ är $A \cap (B-C)$



$A \cap (B-C)$



Området markerat med // är $(A \cap B)-(A \cap C)$



$(A \cap B)-(A \cap C)$

Eftersom Venndiagrammen är lika så gäller $A \cap (B-C) = (A \cap B)-(A \cap C)$

b) Låt $A=\{1\}$ $B=\{2\}$ och $C=\{3\}$
Då gäller $A \cup (B-C) = \{1,2\}$
och $(A \cup B)-(A \cup C) = \{1,2\}-\{1,3\} = \{2\}$
I allmänhet gäller alltså inte
$A \cup (B-C) = (A \cup B)-(A \cup C)$

c) Låt $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ och $C=\{1,3\}$
Då gäller $A \cap (B \cup C) = \{1,2\}$
och $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{2\} \cup \{3\} = \{2,3\}$
I allmänhet gäller alltså inte
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

3.

Ekvationen som skall lösas är

$$126x + 343y = 11879$$

där $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

Euklides algoritm ger

$343 = 2 \cdot 126 + 91$
$126 = 91 + 35$
$91 = 2 \cdot 35 + 21$
$35 = 21 + 14$
$21 = 14 + 7$
$14 = 2 \cdot 7$

sista nollskilda rest är 7
så $sgd(343, 126) = 7$

Eftersom $7 \mid 11879$ finns det $p, q \in \mathbb{Z}$ så att

$$126p + 343q = 11879$$

Euklides baklänges ger

$7 = 21 - 14 = 21 - (35 - 21) = 2 \cdot 21 - 35 =$
$= 2(91 - 2 \cdot 35) - 35 = 2 \cdot 91 - 5 \cdot 35 =$
$= 2 \cdot 91 - 5(126 - 91) = 7 \cdot 91 - 5 \cdot 126 =$
$= 7(343 - 2 \cdot 126) - 5 \cdot 126 = 7 \cdot 343 - 19 \cdot 126$

Vi får alltså $-19 \cdot 126 + 7 \cdot 343 = 7$

Division med 7 ger

$$-19 \cdot 18 + 7 \cdot 49 = 1$$

Multiplikation med 1697 ger

$$-32243 \cdot 18 + 11879 \cdot 49 = 1697$$

Addera $49k \cdot 18 - 18k \cdot 49 = 0$

så att $49k - 32243 \geq 0$ dvs $k > 658$
och så att $11879 - 18k \geq 0$ dvs $k < 660$

Eftersom $k \in \mathbb{Z}$ är $k = 659$

$$(-32243 + 49 \cdot 659) \cdot 18 + (11879 - 18 \cdot 659) \cdot 49 = 1697$$

$$48 \cdot 18 + 17 \cdot 49 = 1697$$

Viser efter multiplikation med 7 att detta är ekvivalent med ursprungsfrågan

$$126 \cdot 48 + 343 \cdot 17 = 11879$$

De skall alltså köpa 48 Biofuntos aktier och 17 Euklidia aktier

4.

P relation på $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ given av att
$(a,b) P (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$

Reflexiv: Eftersom $a+b = b+a$ för alla $(a,b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ är $(a,b) P (a,b)$
Relationen alltså reflexiv

Symmetrisk: Tag $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ så att $(a,b) P (c,d)$. Detta innebär att
$a+d = b+c \Leftrightarrow b+c = a+d \Leftrightarrow c+b = d+a$
Så $(c,d) P (a,b)$
Relationen är symmetrisk

Transitiv: Tag $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ så att $(a,b) P (c,d)$ och $(c,d) P (e,f)$. Då har vi:
$a+d = b+c$ och $c+f = d+e$ eller
$a-b = c-d$ och $c-d = e-f$ som ger
$a-b = e-f$ eller $a+f = e+b$ så $(a,b) P (e,f)$
och relationen är transitiv

Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, d.v.s en ekvivalensrelation

5 Visar med induktion att (*) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för $n \in \mathbb{Z}_+$

I Visar att (*) är sann för $n=1$

$$VL = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$HL = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$, $VL = HL$ så * sann för $n=1$

II Antag att (*) sann för $n = p$ $p \geq 1$

d.v.s. $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$ (**)

Visar att (*) då också är sann för $n = p+1$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = [\text{enl (**)}] =$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2} = \frac{p+1}{p+1+1}$$

så (*) sann för $n = p+1$

III Enligt induktionsaxiomet ger I och II att (*) är sann för alla positiva heltal n.

6.

$$\begin{cases} x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0 & n = 2,3,4 \\ x_0 = 0,\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Karakteristiska ekvationen till $x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$ som ger

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Så vi har rötterna $r_1 = 3$ och $r_2 = -2$

Den allmänna lösningen är således

$$x_n = A\cdot 3^n + B(-2)^n$$

$n=0$ ger $x_0 = A + B = 0$

$n=1$ ger $x_1 = 3A - 2B = 1$

$2x_0 + x_1$ ger $5A = 1$ så $A = \frac{1}{5}$

att $A + B = 0$ ger $B = -\frac{1}{5}$

Lösningen är

$$x_n = \frac{1}{5}3^n - \frac{1}{5}(-2)^n \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Kontroll med iteration

$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = x_1 + 6x_0 = 1$

$x_3 = x_2 + 6x_1 = 7$

$x_4 = x_3 + 6x_2 = 13$

Kontroll med formeln

$x_0 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$

$x_1 = \frac{1}{5}\cdot 3 - \frac{1}{5}(-2) = 1$

$x_2 = \frac{1}{5}\cdot 9 - \frac{1}{5}\cdot 4 = 1$

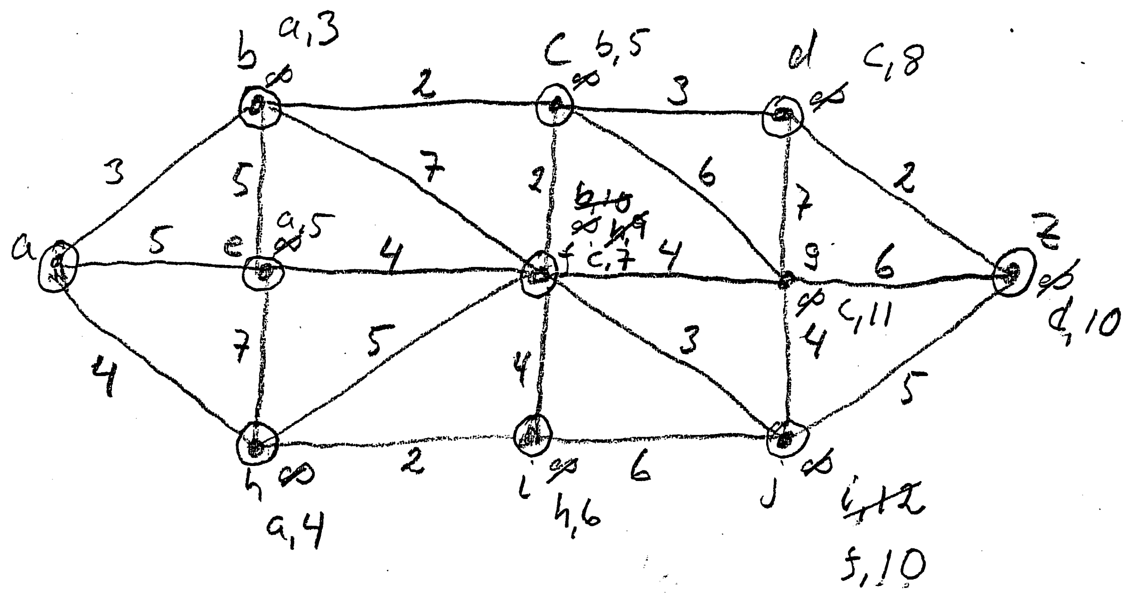
$x_3 = \frac{1}{5}\cdot 27 - \frac{1}{5}(-8) = 7$

$x_4 = \frac{1}{5}\cdot 81 - \frac{1}{5}\cdot 16 = 13$

7 De två graferna är inte isomorfa

I den högra grafen kan vi hitta en triangel mellan hörn av gradtal fyra (alternativ en fyrcykel), vilket inte finns i den vänstra grafen.

8.



Den kortaste stigen ges av

(a, b, c, d, z)

av längd 3 + 2 + 3 + 2 = 10