

Tentamen i Algebra och diskret matematik, 5p, 2005-01-08

Skrivtid: 5 timmar.

Hjälpmedel: TEFYMA, Gymnasieskolans formelsamling och egen (ej symbolhanterande) räknedosa.

Lärare: Sam Lodin, Eva Proffe, Mikael Torenfält.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Varje uppgift ger högst 3 poäng.

Maximalt poängantal är 24. 10-17 poäng ger G, 18-24 poäng ger VG.

1.
 - a) Till en julfest förväntades tio personer komma. Därför hade man skaffat tio julklappar. Emellertid kom endast åtta personer på festen. Vid julklappsutdelningen fick alla var sitt paket. De två klappar som blev över sparades till nästa jul. På hur många olika sätt kunde julklappsutdelningen äga rum? (1,5p)
 - b) Den symmetriska differensen $A \Delta B$ mellan mängderna A och B definieras genom $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Visa att det, för godtyckliga mängder X , Y och Z , alltid gäller att $(X \Delta Y) \Delta (Y \Delta Z) = X \Delta Z$. (1,5p)
2.
 - a) Uttryck decimala (år)talet 2005 i talbasen 7. (1,5p)
 - b) Bestäm resten när talet 2005^{666} divideras med 13. (1,5p)
3. Talen 1059, 1417 och 2312 ger samma "principal" (dvs icke-negativa) rest r när de delas med ett visst positivt heltal d (>1). Bestäm talen d och r . (Talet $r - d$, som är negativt, är för övrigt den "absolut minsta" resten.)
Ledning: Tag hjälp av Euklides algoritm på något smart sätt.
4. Definiera relationen $\sim$ på $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, där $\mathbf{R}$ betecknar de reella talen, genom $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
 - a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. (2p)
 - b) Beskriv ekvivalensklasserna geometriskt. (1p)
Ledning: Det är fråga om välkända geometriska figurer!

5. Visa med induktion att $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ för alla positiva heltal n .
6. Följande talföljd är given: 3, 16, 2, 94, -82,
Vad är nästa tal i följden?
Ledning: Sätt upp en rekursionsformel (differensekvation) för talföljden. Utgå från att talföljden beskrivs av en homogen, linjär differensekvation av 2:a ordningen (med konstanta koefficienter).
7. a) Låt $f: R \rightarrow R$ ges av $f(x) = 3 - x$ då $x \geq 0$ och $f(x) = x^2$ då $x < 0$.
Ange om f är injektiv och/eller surjektiv. (1,5p)
- b) Låt $f: R \rightarrow R$ ges av $f(x) = -3 - x$ då $x \geq 0$ och $f(x) = x^2$ då $x < 0$.
Ange om f är injektiv och/eller surjektiv. (1,5p)
8. I julas gick det inte så bra för tomten vid julklappsutdelningen, så för att undvika att samma problem uppstår nästa gång, har han vänt sig till Mittuniversitetet för att få hjälp med att på kortast möjliga tid komma runt mellan sex olika städer under julaftonskvällen. Jultomten startar sin färd i Rovaniemi och skall besöka städerna Helsingfors, Köpenhamn, Oslo, Stockholm och Tallinn. Efter att ha lämnat av paket i dessa städer skall han återvända till Rovaniemi. "Flygtiden", i minuter, mellan dessa orter framgår av tabellen nedan. Med hjälp av valfri metod (redovisa hur Du bar Dig åt) skall Du komma fram till kortast möjliga tid att fullfölja uppdraget.
- | | R | H | K | O | S | T |
|-------------|---|----|----|----|----|----|
| Rovaniemi | 0 | 19 | 37 | 27 | 22 | 23 |
| Helsingfors | | 0 | 28 | 18 | 12 | 4 |
| Köpenhamn | | | 0 | 18 | 20 | 23 |
| Oslo | | | | 0 | 10 | 19 |
| Stockholm | | | | | 0 | 9 |
| Tallinn | | | | | | 0 |

Ledning: Ovanstående är inget MST-problem utan ett TSP ("Travelling Salesman Problem"). Ett sådant problem har ingen enkel algoritmlösning (som alltid fungerar)! Pröva dig fram!

Rätta svar till tentan i AlgDiMa 050108

1. a) $\binom{10}{8} 8! = \frac{10!}{2!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1814400$. b) [Rita Venn-diagram]
2. a) $2005_{10} = 5563_7$
- b) Resten är 1. [Räkning modulo 13 ger
 $2005^{666} = (154 \cdot 13 + 3)^{666} \equiv 3^{666} = (3^3)^{222} = 27^{222} = (2 \cdot 13 + 1)^{222} \equiv 1^{222} = 1$]
3. $d = 179, r = 164$.
- [Enligt förutsättningen gäller $\begin{cases} 1059 = q_1 d + r = (q_1 + 1)d - (d - r) \\ 1417 = q_2 d + r = (q_2 + 1)d - (d - r), \\ 2312 = q_3 d + r = (q_3 + 1)d - (d - r) \end{cases}$
- där q_1, q_2 och q_3 är positiva heltal. Detta ger $\begin{cases} 358 = (q_2 - q_1)d \\ 1253 = (q_3 - q_1)d \end{cases}$
- Alltså är d en gemensam delare till 358 och 1253.
Euklides algoritmen ger $1253 = 3 \cdot 358 + 179$, $358 = 2 \cdot 179$, varför $\text{SGD}(1253, 358) = 179$.
Eftersom 179 är ett primtal, $1 < d$ och $d \mid 179$, så måste $d = 179$.
- Nu får man lätt $\begin{cases} 1059 = 5 \cdot 179 + 164 = 6 \cdot 179 - 15 \\ 1417 = 7 \cdot 179 + 164 = 8 \cdot 179 - 15 \\ 2312 = 12 \cdot 179 + 164 = 13 \cdot 179 - 15 \end{cases}$
4. b) Ekvivalensklasserna är cirklar med medelpunkt i origo.
6. Nästa tal i den givna talföljden är 646.
- [Ansätter man rekursionsformeln $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$ får man ekvationssystemet $\begin{cases} 16a + 3b = 2 \\ 2a + 16b = 94 \\ (94a + 2b = -84) \end{cases}$
- som har lösningen $a = -1, b = 6$. Talföljdens differensekvation är alltså
- $$\begin{cases} x_n + x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0, & n = 2, 3, 4, \dots \\ x_0 = 3, & x_1 = 16 \end{cases}$$
- (vars lösning är (den icke-rekursiva formeln) $x_n = 5 \cdot 2^n - 2 \cdot (-3)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$)
- Iteration i differensekvationen (eller insättning i icke-rekursiva formeln) ger $x_5 = 646$.]
7. a) f är surjektiv men inte injektiv. b) f är injektiv men inte surjektiv.
8. Snabbaste vägen (Kortaste hamiltoncykeln) är R-H-T-K-O-S-R, som ger totaltiden 96 min.
[Observera att följande heuristiska algoritmen inte fungerar i detta problem:
"Välj upprepade gånger den kortaste kanten bland alla kanter som ännu inte är valda, så att inte fler än två valda kanter når ett och samma hörn och så att inga mindre cykler bildas".
Algoritmen ger nämligen följande kantvalsordning: HT, TS, SO, OK, HR, KR, dvs hamiltoncykeln R-H-T-S-O-K-R, som har längden 97. Det finns för övrigt ytterligare en hamiltoncykel med längden 97, R-H-T-S-K-O-R]