

Uppgift sju ger fyra, de andra ger tre poäng. För G krävs 12 poäng, för VG 18 poäng.

1. Bevisa eller motbevisa (genom att hitta motexempel) följande påståenden.

- (a) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$
- (b) $A - (B \cap A) = A - B$
- (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. Givet en funktion $f : A \rightarrow A$ kallas ett element $a \in A$ för en fixpunkt till f om $f(a) = a$.

- (a) Hitta alla fixpunkter till $f : \mathbb{Z}_{77} \rightarrow \mathbb{Z}_{77}$, $f(x) = [7]_{77} \odot x$.
- (b) Hitta alla fixpunkter till $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $f(x) = [k]_p \odot x$, där p är ett primtal och k är ett godtyckligt heltal.

3. Bevisa, eller motbevisa, för vardera av de två relationerna

$$R = \{ (a, b) \mid a^2 + b^2 = 1 \} \text{ och}$$
$$S = \{ (a, b) \mid a^2 - b^2 = 0 \}$$

på de reella talen att de är

- (a) reflexiva.
 - (b) symmetriska.
 - (c) transitiva.
4. (a) Hur många olika *köer* kan bildas med k personer?
(b) Hur många olika *ringar* kan bildas med k personer? Dvs på hur många olika sätt kan k personer ställa sig i en ring om vi bara tar hänsyn till den inbördes ordningen mellan personerna?
5. (a) Definiera vad ett *träd* är.
(b) Hitta (och rita) två icke-isomorfa träd med fyra noder (vertices). Bevisa att de inte är isomorfa.

6. Följande tabell visar avståndet i mil mellan sex svenska städer.

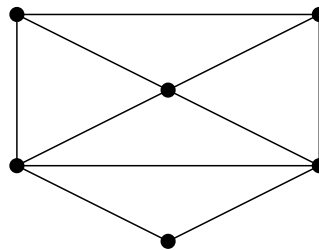
	Jön	Kal	Lan	Mal	Nor	Osk
Jönköping		21	25	27	17	17
Kalmar	21		27	28	25	7
Landskrona	25	27		4	42	32
Malmö	27	28	4		44	33
Norrköping	17	25	42	44		17
Oskarshamn	17	7	32	33	17	

Du har till uppgift att lägga en fiberoptisk kabel mellan dessa sex städer. På vilket sätt skall du lägga den så att den sammanlagda längden lagd kabel blir så liten som möjligt? (Obsevera att inte varje stad behöver vara direkt sammanlänkad med varje annan stad, det räcker att de är indirekt sammanlänkade.)

7. Visa att om $n \geq 2$ är ett heltal, $[x] \in \mathbb{Z}_n$ och $n \nmid x$ så existerar det en multiplikativ invers till $[x]$ i $\mathbb{Z}_n$ om och endast om $\text{sgd}(x, n) = 1$.

8. (a) Definiera vad en *Eulercykel* är.
 (b) Definiera vad en *Hamiltoncykel* är.

Betrakta nedanstående graf.



- (c) Har den någon Eulercykel?
 (d) Har den någon Hamiltoncykel?

Glöm inte att motivera ditt svar.

Lycka till!
 Fredrik Engström
 Mobiltelefon: 0730496178