

1. (a) Falskt. Tag t.ex. $A = \{1\}$ och $B = \emptyset$ då är $A \cap (B \cup A) = \{1\}$ och $A \cap B = \emptyset$.
- (b) Sant. Vi visar först att $A - (B \cap A) \subseteq A - B$. Tag $x \in A - (B \cap A)$, det betyder att x ligger i A men inte i både A och B . Det vill säga att x ligger i A men inte i B . Alltså har vi att $x \in A - B$.
- Nu måste vi också visa att $A - B \subseteq A - (B \cap A)$. Tag $x \in A - B$, dvs x ligger i A men inte i B . Då är det klart att x inte ligger i $A \cap B$ och alltså har vi att $x \in A - (B \cap A)$.
- Detta ger tillsammans att $A - (B \cap A) = A - B$, vilket skulle visas.
- (c) Falskt. Ta t.ex. $A = B = \emptyset$ och $C = \{1\}$. Då har vi att $A \cap (B \cup C) = \emptyset$, men $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1\}$.

2. (a) Om $f(x) = x$ så har vi att $x = [7]_{77} \odot x$ dvs att om $x = [k]$ så är

$$k \equiv 7k \pmod{77}.$$

Alltså att

$$6k \equiv 0 \pmod{77}$$

Låt nu a vara den multiplikativa inversen till 6, (eftersom $\text{sgd}(6, 77) = 1$ finns en sådan). Vi har att

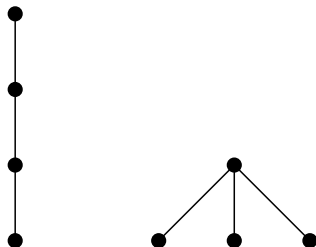
$$k \equiv a0 = 0 \pmod{77}$$

alltså måste $k = 77n$ för något heltal n och alltså $x = [k] = [0]$.

- (b) Om x är en fixpunkt så måste (som ovan) $[k-1] \odot x = [0]$ (i $\mathbb{Z}_p$). Vi har två fall
- 1) $[k-1] \neq [0]$: Då har $[k-1]$ en multiplikativ invers (ty p är ett primtal), kalla den a . Vi har nu att $x = [0] \odot a = [0]$, dvs att $x = [0]$.
- 2) $[k-1] = [0]$: Då är alla $x \in \mathbb{Z}_p$ fixpunkter eftersom $f(x) = [1] \odot x = x$.
- Alltså, om $k \equiv 1 \pmod{p}$ så är alla element i $\mathbb{Z}_p$ fixpunkter. Om inte så finns bara en fixpunkt och det är $[0]$.

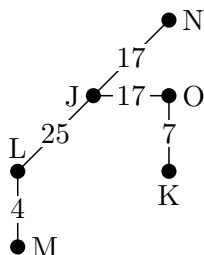
3. (a) R är inte reflexiv ty $(1, 1) \notin R$. S är reflexiv ty $a^2 - a^2 = 0$ för alla $a \in \mathbb{R}$, dvs $(a, a) \in S$ för alla sådana a .
- (b) R är symmetrisk ty om $a^2 + b^2 = 1$ så gäller (såklart) att $b^2 + a^2 = 1$. S är också symmetrisk ty om $a^2 - b^2 = 0$ så gäller också att $b^2 - a^2 = 0$.
- (c) R är inte transitiv ty $(1, 0) \in R$ och $(0, 1) \in R$, men $(1, 1) \notin R$. S är transitiv ty om $a^2 = b^2$ och $b^2 = c^2$ så måste $a^2 = c^2$ och alltså $a^2 - c^2 = 0$.
4. (a) På första plats kan man välja från k personer, på andra plats från $k-1$ personer, på tredje plats från $k-2$ personer osv. Antalet köer blir alltså $k(k-1)(k-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$.
- (b) Varje kö kan bilda en ring genom att man sammanbinder den första med den sista. På detta sätt bildas samma ring från k olika köer. Alltså måste antalet ringar vara $k!/k = (k-1)!$.

5. (a) Ett träd är en graf utan cykler.
 (b) Dessa två träd är inte isomorfa:



Anledningen är att den ena har en node med valens tre, det har inte den andra.

6. Vi hittar ett minimalt spännande träd i grafen K_6 (den fullständiga grafen på sex noder) där noderna är markerade med de sex städernas namn och kanterna har vikter svarande mot avståndet mellan städerna. Vi använder oss av Prims algoritm och Jönköping som startnode. Resultatet blir då



med en sammanlagd längd av 70 mil fiberoptisk kabel.

7. Se sats 4.20 i läsanvisningarna.
8. (a) En Eulercykel är en cykel som besöker varje kant i en graf.
 (b) En Hamiltoncykel är en cykel som besöker varje hörn precis en gång.
 (c) Nej, eftersom det finns två hörn med udda valens.
 (d) Ja. Besök hörnen i den ordning som är given i nedanstående figur.

