

1. (a) Euklides algoritm ger

$$7826 = 1 \cdot 4362 + 3464$$

$$4362 = 1 \cdot 3464 + 898$$

$$3464 = 3 \cdot 898 + 770$$

$$898 = 1 \cdot 770 + 128$$

$$770 = 6 \cdot 128 + 2$$

$$128 = 64 \cdot 2 + 0$$

Baklänges får vi:

$$\begin{aligned} 2 &= 770 - 6 \cdot 128 = 770 - 6(898 - 770) = 7 \cdot 770 - 6 \cdot 898 = 7(3464 - 3 \cdot 898) - 6 \cdot 898 \\ &= 7 \cdot 3464 - 27 \cdot 898 = 7 \cdot 3464 - 27(4362 - 3464) = 34 \cdot 3464 - 27 \cdot 4362 \\ &= 34(7826 - 4362) - 27 \cdot 4362 = 34 \cdot 7826 - 61 \cdot 4362 \end{aligned}$$

Alltså är $x = 9 \cdot -61 = -549$ och $y = 9 \cdot 34 = 306$ en partikulärlösning. Den allmänna blir då:

$$\begin{cases} x = -549 + 7826/2k = -549 + 3913k \\ y = 306 - 4362/2k = 306 - 2181k \end{cases}$$

- (b) Har inga lösningar ty $\text{sgd}(9367, 9947) = 29 \nmid 56$.

(c)

$$76x \equiv 20 \pmod{32}$$

$$19x \equiv 5 \pmod{8}$$

$$3x \equiv 5 \pmod{8}$$

$$3 \cdot 3x \equiv 3 \cdot 5 \pmod{8}$$

$$x \equiv 7 \pmod{8}$$

Så den allmänna lösningen är $x = 7 + 8k$.

2. (a) $\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$. (b) 2^n . (c) 2^{2^n} .

3. (a) $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$, $u_3 = 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$, $u_4 = 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$,
 $u_5 = 16 + 2 \cdot 4 + 1 = 25$.

- (b) Basfall: $u_1 = 1 = 1^2$. Induktionssteg: Antag att $u_i = i^2$ för alla $i < k$, där $k > 1$.
Vi visar att $u_k = k^2$:

$$u_k = u_{k-1} + 2k - 1 = (k-1)^2 + 2k - 1 = k^2 - 2k + 1 + 2k - 1 = k^2.$$

Enligt induktionsprincipen gäller nu alltså att $u_n = n^2$ för alla $n \geq 1$.

(c) Basfall: $u_1 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6 = 1$. Induktionssteg: Antag att

$$\sum_{k_1}^i u_k = i(i+1)(2i+1)/6,$$

vi visar att då är

$$\sum_{k_1}^{i+1} u_k = (i+1)(i+2)(2(i+1)+1)/6.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k_1}^{i+1} u_k &= \sum_{k_1}^i u_k + u_{i+1} = i(i+1)(2i+1)/6 + (i+1)^2 \\ &= \dots = (i+1)(i+2)(2i+3)/6. \end{aligned}$$

Av induktionsprincipen följer nu att påståendet gäller för alla $n \geq 1$.

4. (a) Falsk, låt $x = 0$ och $y = 5$.
 (b) Sann, ty om $11 \mid 2a$ så gäller att $11 \mid a$ ty $\text{sgd}(2, 11) = 1$.
 (c) Falsk, eftersom summan av antalet grader är lika med två gånger antalet kanter måste alltid denna summa vara jämn.
 (d) Sann, K_5 (det är dock den enda).
5. (a) Falsk, tag t.ex. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ och $C = \{2\}$.
 (b) Falsk, tag t.ex. $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ och $C = \{2\}$.
 (c) Sant. Om $A \neq B$ så skulle antingen $A \setminus B$ eller $B \setminus A$ vara icke-tom. Antag att $A \setminus B \neq \emptyset$. Tag $x \in A \setminus B$, då är $x \in B \setminus A$ (eftersom $A \setminus B = B \setminus A$). Speciellt har vi att $x \in B$, men $x \notin B$ eftersom $x \in A \setminus B$. Vi har en motsägelse och alltså måste $A = B$.
6. Den är inte reflexiv eftersom $0 \cdot 0 \not\prec 0$, alltså gäller inte $0R0$. Den är dock symmetrisk eftersom aRb betyder att antingen är a och b både positiva eller båda negativa (alltså inte 0). Den är också transitiv av samma anledningen. R är ingen ekvivalensrelation eftersom den inte är reflexiv. (R är dock en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.)
7. (a) Har ingen Eulerväg eftersom den har noder med udda valens. Ej heller någon Hamiltoncykel. Numrera noderna från vänster till höger och uppifrån och ner. Om vi har en Hamiltoncykel så måste den passera nod 1. Låt oss följa cykeln till nod 2. Där måste den sedan gå till nod 5 eller 6, vidare till 6 eller 5 och sedan till 9. Anledningen är att om nod 5 skall besökas så måste vi använda både nod 2 och 9. Härifrån måste vi fortsätta till nod 12 (eftersom om nod 12 skall besökas måste vi använda nod 9). Vidare till 11 och en upprepning av argumenten visar att vi aldrig kommer att kunna besöka noderna 3 och 10 innan vi är tillbaka vid nod 1.
 (b) Har Eulerväg eftersom alla noder har jämn valens. Ej någon Hamiltoncykel eftersom vi måste traversera noden i mitten längst ner flera gånger om vi skall besöka alla noder.
 (c) Har ej Eulerväg eftersom den har nod av udda valens. Har en Hamiltoncykel.

- (d) Har ej Eulerväg eftersom den har noder av udda valens. Har Hamiltoncykel.
8. (a) Kortaste vägen hittas med Dijkstras algoritm och blir S, b, d, T som är 7 lång.
- (b) Ett minimalt uppspännande träd hittas med Kruskals algoritm och blir t.ex.

$Sb, ae, ce, eT, dT, bd.$