TFM
Mittuniveristetet

Lösningsförslag till tentan i
Algebra och diskret matematik (MAAA99), 5p
2005–08–25

1. (a) $\binom{55}{2}$. (b) Det finns 8! permutationer av mängden, 7! av dessa har ab i sig och 7! har ba i sig. Alltså är svaret $8! - 2 \cdot 7! = 6 \cdot 7!$.

2. (a) Genom test ser man att $x \equiv 2, 4, 8, 10 \pmod{12}$ löser ekvationen.

   (b) Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 45 &= 1 \cdot 32 + 13 \\ 32 &= 2 \cdot 13 + 6 \\ 13 &= 2 \cdot 6 + 1 \\ 6 &= 6 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

   Baklänges får vi:

$$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2(32 - 2 \cdot 13) = 5 \cdot 13 - 2 \cdot 32 = 5(45 - 32) - 2 \cdot 32 = 5 \cdot 45 - 7 \cdot 32$$

   Alltså är $x = -7 \cdot 56 = -392$ och $y = -5 \cdot 56 = -280$ en partikulärlösning. Den allmänna blir då:

$$\begin{cases} x = -392 - 45k \\ y = -280 - 32k \end{cases}$$

   (c) Dela med två och vi får den ekvivalenta ekvationen $x \equiv 4 \pmod{39}$.

3. (a)

$$\begin{aligned} 3785 &= 291 \cdot 13 + 2 \\ 291 &= 22 \cdot 13 + 5 \\ 22 &= 1 \cdot 13 + 9 \\ 1 &= 0 \cdot 13 + 1 \end{aligned}$$

   Alltså blir svaret $(1952)_{\text{tretton}}$.

   (b) Se boken.

   (c)

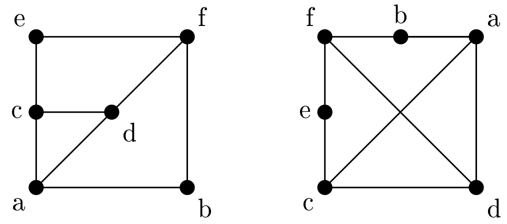
$$\begin{aligned} 8762 &= 1 \cdot 4561 + 4201 \\ 4561 &= 1 \cdot 4201 + 360 \\ 4201 &= 11 \cdot 360 + 241 \\ 360 &= 1 \cdot 241 + 119 \\ 241 &= 2 \cdot 119 + 3 \\ 119 &= 39 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

   Största gemensamma delare är alltså ett.

4. (a) $4, 36, 68$. (b) $[5]_{16}$.

5. (a) Går ej på grund av lådprincipen. (b) $f(x) = x$ om $x = 2, 3, 4$ och $f(1) = 2$. (c) $f(x) = 2x - 1$.

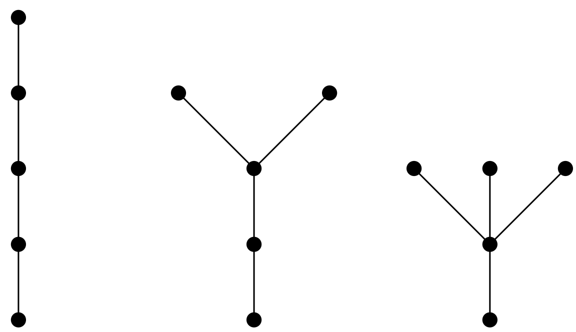
6. (a) Ja. Det följande är en isomorfi:



(b) Ja. T.ex. är $efbadce$ en Hamiltoncykel.

(c) Nej ty grafen har noder av udda valens.

7. Det finns tre olika. De är inte isomorfa eftersom de har olika valensersekvenser: $1, 1, 2, 2, 2$; $1, 1, 1, 2, 3$ respektive $1, 1, 1, 1, 4$.



8. (a) Detta är en såkallad teleskoperande summa eftersom termerna tar ut varandra (utom den första och den sista). Alltså blir summan $1 - \frac{1}{n+1}$.

(b) Produkten blir $n + 1$.

(c) Induktionsbas när $n = 1$: Vänsterledet är då $4-3+1+1 = 3$ och högerledet är $1+1+1 = 3$.

Induktionssteget: Antag att påspåendet är sant för $n = i$, vi visar att det då är sant för $n = i + 1$. Vänsterledet blir

$$\sum_{k=1}^{i+1}(4k^3 - 3k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^{i}(4k^3 - 3k^2 + k + 1) + 4(i+1)^3 - 3(i+1)^2 + (i+1) + 1$$
$$= i^4 + i^3 + i + (4i^3 + 12i^2 + 12i + 4) - (3i^2 + 6i + 3) + i + 2 = i^4 + 5i^3 + 9i^2 + 8i + 3.$$

Högerledet blir:

$$(i+1)^4 + (i+1)^3 + (i+1) = (i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1) + (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) + i + 1 = i^4 + 5i^3 + 9i^2 + 8i + 3$$

Alltså är högerled och vänsterled lika och påståendet följer från induktionsprincipen för all $n \geq 1$.