MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2005

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 2 november 2005

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

(a) Låt A,B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.

(i) Markera området $X = A - (B \cap C)$ i ett Venndiagram.

(ii) Markera området $Y = (A \cup B) - (B \cup C)$ i ett Venndiagram.

(iii) Avgör om $X = Y$ för *alla* val av A, B och C. Motivera ditt svar.

(iv) Finn tre icke-tomma mängder av positiva heltal A, B och C sådana att

$$A - (B \cap C) = (A \cup B) - (B \cup C).$$

[2p]

(b) Ange mängden

$$M_1 = \{\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{5}{5}, \tfrac{7}{5}, \tfrac{9}{5}, \dots\}$$

med hjälp av inklusionsregler. [0.5p]

(c) Ange mängden

$$M_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 7x + 12 = 0\}$$

genom att lista elementen. [0.5p]

Uppgift 2

Bestäm vilket/vilka alternativ som är korrekt/a i det följande. Ge en kort motivering för alla dina svar.

(a) Antalet 7-siffriga binära strängar som innehåller precis 4 nollor är

(i) 35
(ii) $2^4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
(iii) 7^4
(iv) 4^7
(v) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ [0.75p]

(b) En funktion $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$

(i) är aldrig injektiv
(ii) är alltid injektiv
(iii) är aldrig surjektiv
(iv) är alltid surjektiv [0.75p]

(c) Summan $10 + 20 + 30 + \ldots + 1000$ kan också uttryckas som

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{99}(1000 - 10i)$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} 10n$

(iii) $\displaystyle 10\sum_{n=1}^{100} n$

(iv) 50500 [0.75p]

(d) Låt n vara ett heltal. Påståendet

‘om $n^2 - 9 < 0$ så är $-3 < n < 3$’

är det kontrapositiva påståendet till

(i) ‘om $n^2 - 9 \geq 0$ så är $-3 \geq n$ eller $n \geq 3$’
(ii) ‘om $-3 \geq n$ och $n \geq 3$ så är $n^2 - 9 \geq 0$’
(iii) ‘$n^2 - 9 \geq 0$ om $-3 \geq n$ eller $n \geq 3$’
(iv) ‘om $3 > n > -3$ så är $n^2 - 9 \geq 0$’ [0.75p]

Uppgift 3

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

(i) reflexiv;

(ii) symmetrisk;

(iii) transitiv;

(iv) anti-symmetrisk;

(v) en partiell ordning. [0.5p]

(b) Ge ett exempel på en relation $\mathcal{R}$ som är en partiell ordning på mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$. Motivera ditt svar! [1p]

(c) Låt R vara en relation på mängden $S = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definierad av

$$(s_1, s_2) \in R \text{ omm } s_1 s_2 > 0.$$

(i) Rita digrafen för R.

(ii) Visa att relationen R är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

(iii) Visa att relationen R är en ekvivalensrelation.

(iv) Ange ekvivalensklasserna för R på S. [1.5p]

Uppgift 4

En talföljd $\{u_n\}$ definieras genom rekursionsformeln

$$u_{n+1} = u_n + 2n \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

och begynnelsevillkoret $u_1 = 1$.

(a) Använd rekursionsformeln för att beräkna u_2, u_3, u_4 och u_5.
Visa dina uträkningar. [1p]

(b) Bevisa genom induktion att

$$u_n = n^2 - n + 1 \quad \text{för alla} \quad n \geq 1.$$

[2p]

Uppgift 5

(a) I en tennisturnering finns det sex tävlande som möter varandra precis en gång. Förklara hur man kan åskådliggöra en sådan turnering med en graf. [0.5p]

(b) Alice och Bob är två åskådare som håller reda på resultaten i matcherna. Alice bestämmer sig för att räkna vinsterna för varje tävlande medan Bob räknar förlusterna. Här är deras resultat:

	Alice (antal vinster)	Bob (antal förluster)
Tävlande 1	2	3
Tävlande 2	2	3
Tävlande 3	4	1
Tävlande 4	3	2
Tävlande 5	3	1
Tävlande 6	1	4

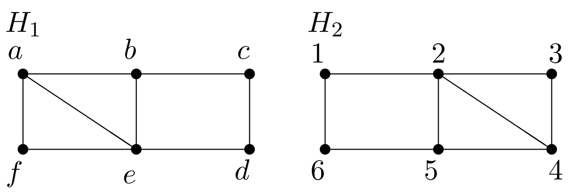
(i) Förklara varför Bob har fått fel resultat.

(ii) Har Alice fått rätt resultat? Motivera ditt svar!

(iii) Om Alice har fått rätt resultat och Bob bara har gjort ett fel, rätta Bob's fel i tabellen. [1p]

(c) (i) Definiera vad som menas med att två enkla grafer är *isomorfa*.

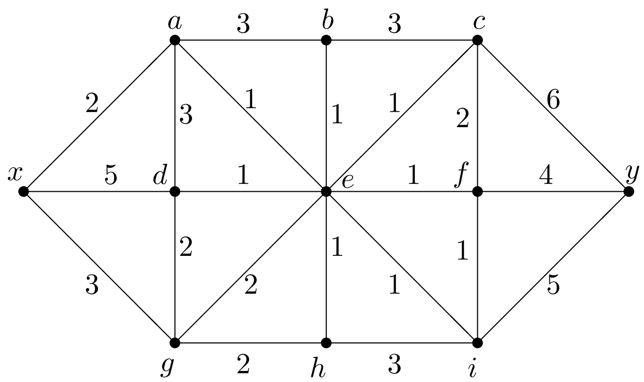
(ii) Visa att graferna H_1 och H_2 nedan är isomorfa. [1.5p]



Uppgift 6

(a) Använd Kruskals eller Prims algoritm för att bestämma ett minsta uppspännande träd för den viktade grafen nedan. Ur din lösning ska det framgå i vilken ordning du väljer ut de kanter som ingår i ditt minsta uppspännande träd. Ange också trädets vikt. [1.5p]

(b) Använd *Dijkstras algoritm* för att bestämma en kortaste stig från hörn x till hörn y i följande viktade graf. Redovisa gången i lösningen, dvs. ur din lösning ska det framgå i vilken ordning hörnen behandlas, hur hörnen märks och hur märkena ändras när du arbetar dig igenom algoritmen. Ange också kortaste stigens längd. [1.5p]



Uppgift 7

(a) (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod 4$.

(ii) Ange de 4 kongruensklasserna för kongruensrelationen $a \equiv b \pmod 4$ på $\mathbb{Z}$.

(iii) Beskriv mängden $\mathbb{Z}_4$.

(iv) Ange additionstabellen för $\mathbb{Z}_4$.

(v) Ange multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_4$.

(vi) Ange alla element i $\mathbb{Z}_4$ som har en multiplikativ invers. [1.5p]

(b) (i) Låt $n \geq 2$ vara ett heltal. Ange en sats som hjälper dig att bestämma om ett element $[x] \in \mathbb{Z}_n$ har en multiplikativ invers eller ej.

(ii) Använd satsen du givit i (i) till att hitta ett element $[a] \in \mathbb{Z}_{120}$ där $[a] \neq [0]$ som *inte* har en multiplikativ invers.

(iii) Ange två element $[x], [y] \in \mathbb{Z}_{120}$ sådana att $[x] \neq [y]$, $[x] \neq [0]$ och $[y] \neq [0]$ men

$$[3] \odot [x] = [3] \odot [y].$$

[1.5p]

Uppgift 8

(a) (i) Låt a och b vara två positiva heltal.
Vilka egenskaper skall ett positivt heltal g uppfylla för att $g = \text{sgd}(a, b)$, *den största gemensamma delaren* till a och b?

(ii) Använd *Euklides algoritm* för att visa att $\text{sgd}(3571, 1753) = 1$.

(iii) Finn två heltal s och t sådana att

$$1753s + 3571t = 1.$$

[1.75p]

(b) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{3571}$ till ekvationen

$$[1753] \odot [x] = [10].$$

Visa dina uträkningar. [0.75p]

(c) Bestäm mängden av alla heltalslösningar x till kongruenserna

(i) $1753x \equiv 2 \pmod{3571}$;

(ii) $3506x \equiv 4 \pmod{7142}$.

Visa dina uträkningar. [0.5p]