

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 16 november 2005

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

- (a) Låt A vara en delmängd av $\mathbb{Z}$. Skriv ner följande påståenden utan att använda orden 'ej', 'icke' eller 'inte'.

- (i) Negationen av

$$x \in A \text{ och } x \geq 0.$$

[0, 75p]

- (ii) Det kontrapositiva påståendet till

$$x \in A \Rightarrow x \geq 0.$$

[0, 75p]

- (iii) Negationen av

För alla heltal x gäller att x är ett sammansatt tal.

[0, 75p]

- (b) Låt p , q och r vara påståenden. Gör en sanningstabell för påståendet

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r.$$

[0, 75p]

Uppgift 2

- (a) Formulera multiplikationsprincipen. [1p]
- (b) En restaurang har på sin meny 5 olika förrätter, 4 varmrätter och 3 desserter.
- (i) En trerättersmiddag består av en förrätt, en varmrätt och en dessert. På hur många sätt kan man komponera en trerättersmiddag utifrån denna meny? [1p]
- (ii) En tvårättersmiddag består av antingen en förrätt och en varmrätt, eller en varmrätt och en dessert. På hur många sätt kan man komponera en tvårättersmiddag utifrån denna meny? [1p]

Uppgift 3

Symbolen $C(n, k)$ eller $\binom{n}{k}$ står för antalet k -kombinationer ur en mängd med n element.

- (a) Förklara vad som menas med en " k -kombination ur en mängd med n element". [0, 5p]

- (b) Förklara varför

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad \text{för } 0 \leq k \leq n.$$

[1p]

- (c) Motivera formeln

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Du kan välja mellan två sätt att göra detta på.

- (i) Du kan göra ett kombinatoriskt resonemang, dvs. du gör ett tydligt resonemang som konstaterar att de båda sidorna i likheten räknar samma sak men på olika sätt.
- (ii) Du kan göra ett algebraiskt resonemang med hjälp av formeln i uppgift (b).

Välj det sätt som du föredrar. [1, 5p]

Uppgift 4

Låt $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ och antag att a , b och c är element i $\mathbb{Z}^*$.

(a) Definiera vad som menas med att a delar b . [0, 5p]

(b) Bevisa att

(i) $a|a$.

(ii) om $a|b$ och $b|c$ så gäller även att $a|c$.

(iii) om $a|b$ och $b|a$ så gäller $a = b$ eller $a = -b$.

[1, 25p]

(c) Låt relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}^*$ definieras av att

$$a\mathcal{R}b \text{ om och endast om } a|b.$$

Tillsammans med en kort motivering för varje svar, ange om $\mathcal{R}$ är

(i) reflexiv?

(ii) transitiv?

(iii) symmetrisk?

(iv) antisymmetrisk?

(v) en ekvivalensrelation?

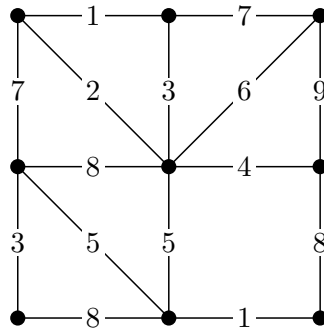
(vi) en partialordning?

[1p]

(d) Ändras något/några av svaren i (c) ovan om vi definierar $\mathcal{R}$ med samma regel, fast på $\mathbb{Z}_+$ istället för på $\mathbb{Z}^*$? Kom ihåg att motivera ditt svar. [0, 25p]

Uppgift 5

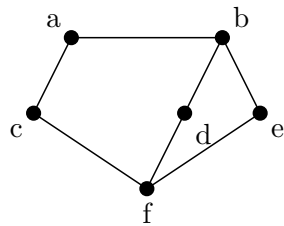
- (a) Använd Kruskals eller Prims algoritm för att bestämma ett minsta uppspannande träd för den viktade grafen nedan. Ur din lösning ska det framgå i vilken ordning du väljer ut de kanter som ingår i ditt minsta uppspannande träd. Ange också trädets vikt. [1p]



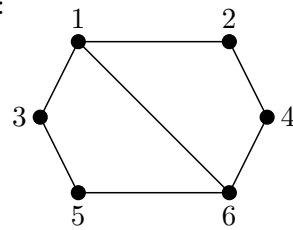
- (b) I respektive uppgift (i) och (ii) nedan, avgör om graferna G och H är isomorfa eller ej. Om så är fallet, ge en isomorfi mellan graferna och visa att detta är en isomorfi, annars, peka på någon strukturell skillnad mellan graferna.

(i)

G :



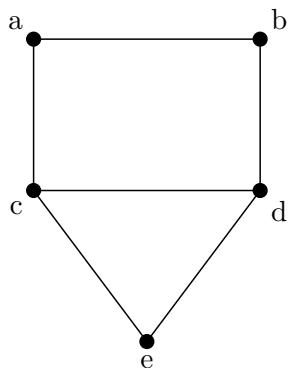
H :



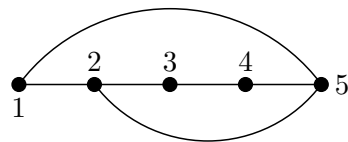
[1p]

(ii)

G :



H :



[1p]

Uppgift 6

Lös ekvationerna

(a) $[4] \odot [x] = [5]$ i $\mathbb{Z}_{1222}$. [0, 75p]

(b) $[3] \odot [x] = [5]$ i $\mathbb{Z}_{1222}$. [1, 5p]

(c) $[3] \odot [x] = [y]$ i $\mathbb{Z}_{1222}$ (där y är ett heltal). [0, 75p]

Uppgift 7

(a) Låt $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ges av

$$g(x) = 3x.$$

- (i) Är g surjektiv?
- (ii) Är g injektiv?
- (iii) Har g någon invers? I så fall, bestäm denna.

[1, 5p]

(b) Låt $f : \mathbb{Z}_{1222} \rightarrow \mathbb{Z}_{1222}$ ges av

$$f([x]) = [3] \odot [x].$$

- (i) Är f surjektiv?
- (ii) Är f injektiv?
- (iii) Har f någon invers? I så fall, bestäm denna.

[1, 5p]

Uppgift 8

För alla positiva heltal n , låt

$$s_n = \sum_{r=1}^n (2r-1)^3.$$

(a) Beräkna s_1 , s_2 , s_3 och s_4 . [0, 5p]

(b) Bevisa med hjälp av induktion att

$$s_n = 2n^4 - n^2, \quad \text{för alla } n = 1, 2, 3, \dots$$

[2, 5p]