

1.

(a) (i)

$$x \notin A \text{ eller } x < 0.$$

(ii)

$$x < 0 \Rightarrow x \notin A.$$

(iii)

Det finns ett heltal x sådant att x är en enhet eller x är ett primtal.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
S	S	S	S	S
S	F	S	F	S
F	S	S	S	S
(b) F	F	S	S	S
S	S	F	S	F
S	F	F	F	S
F	S	F	S	F
F	F	F	S	F

2.

(a) Om n stycken beslut ska fattas och om det för det j :e beslutet finns k_j beslutsmöjligheter ($1 \leq j \leq n$), så finns det

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n,$$

olika möjliga beslutsföljder.

(i) Enligt multiplikationsprincipen finns $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika möjliga trerättersmiddagar.

(ii) Antalet tvårättersmiddagar bestående av en förrätt och en varmrätt är enligt multiplikationsprincipen $5 \cdot 4 = 20$ st, medan antalet tvårättersmiddagar bestående av en varmrätt och en dessert är $4 \cdot 3 = 12$ st. Totalt finns alltså $20 + 12 = 32$ stycken olika tvårättersmiddagar.

3.

(a) En k -kombination ur en mängd med n element, är ett ordnat urval av k st element från en mängd med n element.

(b) Vi betraktar först ett ordnat urval av k element. Till första elementet finns n st möjligheter, till andra elementet $n-1$ st möjligheter, ..., till k :e elementet finns $n-k+1$ st möjligheter. Enligt multiplikationsprincipen finns alltså

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

stycken *ordnade* urval av k st element. På detta sätt har man räknat varje ordnat urval $k!$ gånger eftersom det är antalet sätt att ordna de k elementen. Det totala antalet ordnade urval blir alltså

$$\frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

(c) (i) **Ett kombinatoriskt resonemang kan se ut så här:** Säg att du vill välja ut k element ur en mängd med $n+1$ element ($1 \leq k \leq n$). Antalet sätt att göra detta på ges av högerledet, så vi behöver bara övertyga oss om att även vänsterledet står för samma sak. Låt oss dela upp de möjliga urvalen i två kategorier. De urval där vi inte tar med mängdens första element och de urval där vi gör det. Tar vi inte med det första elementet, måste vi välja ut k element ur de återstående n

elementen, vilket vi kan göra på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Tar vi med första elementet måste vi välja ut ytterligare $k - 1$ element bland de återstående n elementen, vilket kan göras på $\binom{n}{k-1}$ sätt. Totalt finns alltså $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ sätt att välja ut k element ur en mängd med $n + 1$ element.

(ii) **Ett algebraiskt resonemang kan se ut så här:**

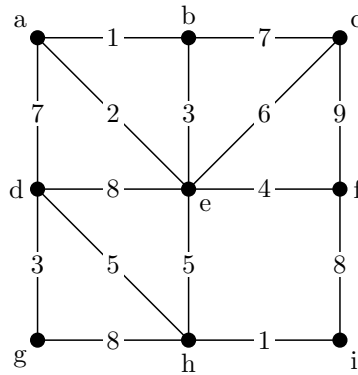
$$\begin{aligned} \text{VL} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!k} + \frac{n!}{(n-k)!(n-k+1)(k-1)!} = \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{(n-k)!(n-k+1)(k-1)!k} = \frac{n!(n-k+1-k)}{(n-k+1)!k!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k} = \text{HL}. \end{aligned}$$

4.

- (a) Då vi redan har antagit att $a \neq 0$ kan vi göra följande definition: a delar b om det finns ett heltal n sådant att $b = na$.
- (b) (i) $a = 1 \cdot a$ och eftersom $1 \in \mathbb{Z}$ gäller alltså att $a|a$.
- (ii) Om $a|b$ och $b|c$, finns två heltal n_1 och n_2 sådana att $b = n_1a$ och $c = n_2b$. Alltså har vi $c = n_2b = n_2n_1a = na$ där $n = n_1n_2 \in \mathbb{Z}$ eftersom $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. M.a.o. gäller att $a|c$.
- (iii) Om $a|b$ och $b|a$, finns två heltal n_1 och n_2 sådana att $b = n_1a$ och $a = n_2b$. Alltså har vi $b = n_1n_2b$. Eftersom $b \neq 0$ kan vi dividera båda sidor med b och får $1 = n_1n_2$, dvs $n_2 = 1/n_1$. Eftersom $n_2 \in \mathbb{Z}$ är enda möjligheten att $n_1 = 1$ eller $n_1 = -1$ vilket (insatt i $b = n_1a$) ger $b = a$ eller $b = -a$.
- (c) $\mathcal{R}$ är:
- (i) reflexiv, eftersom enligt (b)(i) gäller $a\mathcal{R}a$ för alla $a \in \mathbb{Z}^*$.
- (ii) transitiv, eftersom enligt (b)(ii) gäller att $(a\mathcal{R}b \text{ och } b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}^*$).
- (iii) ej symmetrisk, eftersom exempelvis $1, 2 \in \mathbb{Z}^*$ och $1|2$ men $2 \nmid 1$.
- (iv) ej antisymmetrisk, eftersom exempelvis $1, -1 \in \mathbb{Z}^*$, $1|-1$ och $-1|1$, men $1 \neq -1$.
- (v) ej en ekvivalensrelation, eftersom $\mathcal{R}$ ej är symmetrisk.
- (vi) ej en partialordning, eftersom $\mathcal{R}$ ej är antisymmetrisk.
- (d) Ja. Om vi byter ut $\mathbb{Z}^*$ mot $\mathbb{Z}_+$ får vi med samma typ av resonemang som i (b)(iii) att $(a|b \text{ och } b|a) \Rightarrow a = b$. Alltså blir $\mathcal{R}$ *antisymmetrisk*, och eftersom $\mathcal{R}$ då är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv är då $\mathcal{R}$ en *partialordning*.

5.

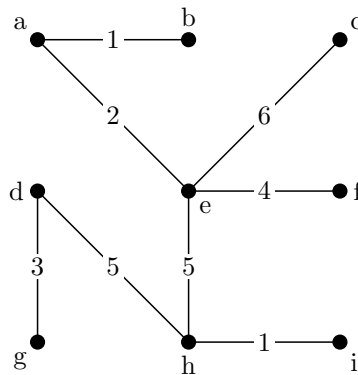
- (a) Om vi ger hörnen namn enligt



och om vi använder Kruskals algoritm, så väljs kanter i följande ordning:

1. (a, b) eller (h, i) , (vikt 1),
2. (h, i) eller (a, b) , (vikt 1),
3. (a, e) , (vikt 2),
4. (d, g) , (vikt 3),
5. (e, f) , (vikt 4),
6. (e, h) eller (d, h) , (vikt 5),
7. (d, h) eller (e, h) , (vikt 5),
8. (c, e) , (vikt 6).

Detta resulterar i det minsta uppspännande trädet



som har vikt $1+1+2+3+4+5+5+6=27$.

- (b) (i) G och H är inte isomorfa, eftersom G till exempel har en cykel med fem hörn medan H saknar en sådan cykel.
- (ii) G och H är isomorfa. Vi har nämligen följande bijektion $f : V_G \rightarrow V_H$ mellan hörnmängderna V_G och V_H till G respektive H :

$$f(a) = 3, \quad f(b) = 4, \quad f(c) = 2, \quad f(d) = 5, \quad f(e) = 1.$$

Att denna bijektion verkligen är en isomorfi, kan vi exempelvis se av att de två

grannmatriserna

G	a	b	c	d	e		H	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(d)$	$f(e)$
a	0	1	1	0	0	och	$f(a)$	0	1	1	0	0
b	1	0	0	1	0		$f(b)$	1	0	0	1	0
c	1	0	0	1	1		$f(c)$	1	0	0	1	1
d	0	1	1	0	1		$f(d)$	0	1	1	0	1
e	0	0	1	1	0		$f(e)$	0	0	1	1	0

är lika.

6.

- (a) Eftersom $\text{sgd}(4, 1222) = 2$ och $2 \nmid 5$, saknar ekvationen lösningar.
 (b) Ett enda steg i Euklides algoritmen ger:

$$1222 = 407 \cdot 3 + 1.$$

Elltså är $\text{sgd}(3, 1222) = 1$ och ekvationen har precis en lösning $[x] = [3]^{-1} \odot [5]$ i $\mathbb{Z}_{1222}$.
 Eftersom

$$1 \cdot 1222 + (-407) \cdot 3 = 1,$$

ser vi att $[3]^{-1} = [-407] = [815]$ och vår lösning blir

$$[x] = [815] \odot [5] = [409] \quad \text{i } \mathbb{Z}_{1222}.$$

- (c) Eftersom $[3]$ har en invers $[815]$ i $\mathbb{Z}_{1222}$ har ekvationen precis en lösning i $\mathbb{Z}_{1222}$, nämligen

$$[x] = [815] \odot [y] = [815y].$$

7.

- (a) (i) Nej. Eftersom det till exempel inte finns något heltal x sådant att $3x = 2$, ligger 2 inte i f 's värdemängd och eftersom värdemängden alltså inte är hela $\mathbb{Z}$ är f ej surjektiv.
 (ii) Ja. Vi har för $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ att

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

så f är injektiv.

- (iii) Nej. Eftersom f ej är surjektiv och således ej bijektiv, saknar f invers.

- (b) (i) Ja. Eftersom ekvationen $[y] = f([x]) = [3] \odot [x]$, enligt uppgift 6.(c) har en lösning i $\mathbb{Z}_{1222}$ för varje heltal y , finns det alltså för varje $[y] \in \mathbb{Z}_{1222}$, ett $[x] \in \mathbb{Z}_{1222}$ sådant att $[y] = f([x])$ och med andra ord är f surjektiv.
 (ii) Ja. Eftersom det, givet $[y] \in \mathbb{Z}_{1222}$, bara finns *en* lösning i $\mathbb{Z}_{1222}$ till ekvationen $[y] = f([x])$, så är f injektiv.
 (iii) Ja. Eftersom f är både surjektiv och injektiv har den en invers $f^{-1} : \mathbb{Z}_{1222} \rightarrow \mathbb{Z}_{1222}$, och eftersom den entydiga lösningen till ekvationen $[y] = f([x])$ i $\mathbb{Z}_{1222}$ ges av $[x] = [815] \odot [y]$, ges alltså inversen av

$$f^{-1}([x]) = [815] \odot [x].$$

8.

(a) Vi får:

$$s_1 = \sum_{r=1}^1 (2r-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 = 1^3 = 1.$$

$$s_2 = \sum_{r=1}^2 (2r-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 + (2 \cdot 2 - 1)^3 = 1 + 3^3 = 28.$$

$$s_3 = \sum_{r=1}^3 (2r-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 + (2 \cdot 2 - 1)^3 + (2 \cdot 3 - 1)^3 = 28 + 5^3 = 153.$$

$$s_4 = \sum_{r=1}^4 (2r-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 + (2 \cdot 2 - 1)^3 + (2 \cdot 3 - 1)^3 + (2 \cdot 4 - 1)^3 = 148 + 7^3 = 496.$$

(b) Vi vill visa att

$$\sum_{r=1}^n (2r-1)^3 = 2n^4 - n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Bassteg: Med $n = 1$ i (1), får vi

$$VL = \sum_{r=1}^1 (2r-1)^3 = 1,$$

samt

$$HL = 2 \cdot 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Eftersom $VL = HL$ gäller (1) för $n = 1$.

Induktionssteg: Vi gör följande *induktionsantagande*: Vi antar att för något $k \geq 1$, så gäller formeln (1) för $n = 1, 2, \dots, k$. I synnerhet gäller då formeln för $n = k$, d.v.s.

$$\sum_{r=1}^k (2r-1)^3 = 2k^4 - k^2. \quad (2)$$

Vi vill visa att under dessa förutsättningar gäller formeln även för $n = k + 1$, d.v.s. vi vill visa att

$$\sum_{r=1}^{k+1} (2r-1)^3 = 2(k+1)^4 - (k+1)^2.$$

Men i ekvationen ovan har vi då,

$$\begin{aligned} VL &= \sum_{r=1}^{k+1} (2r-1)^3 = \underbrace{\sum_{r=1}^k (2r-1)^3}_{=2k^4-k^2 \text{ enl. (2)}} + (2(k+1)-1)^3 = 2k^4 - k^2 + (2k+1)^3 = \\ &= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1, \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} HL &= 2(k+1)^4 - (k+1)^2 = 2(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - (k^2 + 2k + 1) = \\ &= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1. \end{aligned}$$

Eftersom $VL = HL$ gäller alltså formeln även för $n = k + 1$.

Enligt induktionsprincipen kan vi dra slutsatsen att formeln (1) gäller för alla $n = 1, 2, 3, \dots$