

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2006

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 21 mars 2006

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

(a) Uttryck det hexadecimala talet $(A80C)_{16}$

(i) som ett binärt tal;

(ii) i basen 10.

[1p]

(b) Ange följande formel m.h.a. summatecken:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[1p]

(c) Beräkna följande summa m.h.a. formeln i (b):

$$\sum_{n=15}^{150} (3n+2).$$

[1p]

Uppgift 2

Talföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras genom

$$s_n = \sum_{r=1}^n r^2 \quad \text{för } n \geq 1.$$

(a) Beräkna s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 och s_6 .

Visa dina uträkningar.

[1p]

(b) Bevisa med induktion att

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

för alla $n \geq 1$.

[2p]

Uppgift 3

- (a) Låt A, B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.
- (i) Markera området $X = (A \cup B) \cap C$ i ett Venndiagram.
 - (ii) Låt $Y = A \cup (B \cap C)$. Avgör om $X = Y$ för *alla* val av A , B och C . Motivera ditt svar.
 - (iii) Finn tre icke-tomma mängder av positiva heltal A , B och C sådana att

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C).$$

[1.5p]

- (b) Ange mängden

$$M_1 = \{\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}, \dots\}$$

med hjälp av inklusionsregler.

[0.5p]

- (c) Ange följande mängder genom att lista elementen.

- (i) $M_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^2 - 7x - 6 = 0\}$;
- (ii) $\mathcal{P}(L)$ där $L = \{x, 1, y, 2\}$.

[1p]

Uppgift 4

- (a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

- (i) reflexiv;
- (ii) symmetrisk;
- (iii) transitiv;
- (iv) anti-symmetrisk.

[0.5p]

- (b) Låt R vara följande relation på mängden $S = \{a, b, c, d\}$.

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c), (d, a)\}$$

- (i) Rita digrafen för R .
- (ii) Relationen R är inte symmetrisk. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli symmetrisk.
- (iii) Relationen R är inte reflexiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli reflexiv.
- (iv) Relationen R är inte transitiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli transitiv.
- (v) Är relationen R anti-symmetrisk? Motivera ditt svar!

[2.5p]

Uppgift 5

Bestäm vilket/vilka alternativ som är korrekt/a i det följande. Ge en kort motivering för alla dina svar.

(a) Antalet 7-siffriga binära strängar som innehåller precis 5 nollor är

(i) $7 \cdot 6 \cdot 5$

(ii) 2^5

(iii) 7^5

(iv) 5^7

(v) 21

[0.75p]

(b) En funktion $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$

(i) är aldrig injektiv

(ii) är alltid injektiv

(iii) är aldrig surjektiv

(iv) är alltid surjektiv

[0.75p]

(c) För alla mängder A och B gäller att om $|A| = 10$ och $|B| = 12$ så är

(i) $|B - A| = 2$

(ii) $|A \cup B| = 22$

(iii) $|A \cup B| < 22$

(iv) $|A \times B| = 120$

[0.75p]

(d) Låt n vara ett heltal. Påståendet

$$\text{'om } n^2 - 4 < 0 \text{ så är } -2 < n < 2\text{'}$$

är det kontrapositiva påståendet till

(i) ' $n^2 - 4 \geq 0$ om $-2 \geq n$ eller $n \geq 2$ '

(ii) 'om $n^2 - 4 \geq 0$ så är $-2 \geq n$ eller $n \geq 2$ '

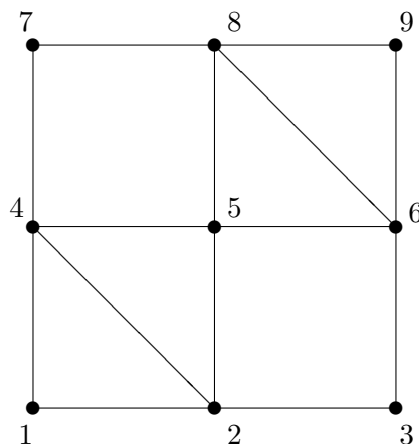
(iii) 'om $-2 \geq n$ och $n \geq 2$ så är $n^2 - 4 \geq 0$ '

(iv) 'om $2 > n > -2$ så är $n^2 - 4 \geq 0$ '

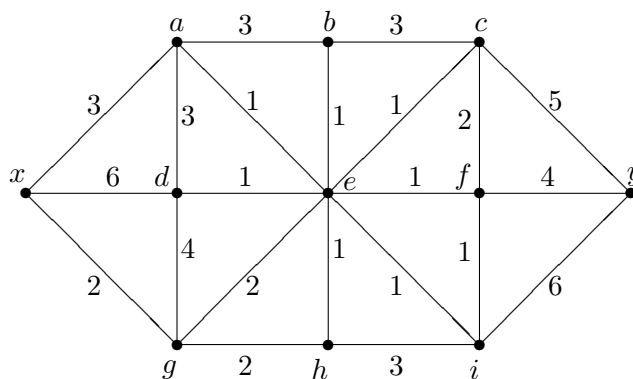
[0.75p]

Uppgift 6

- (a) (i) Ange en grannmatris för följande graf G :



- (ii) Förklara varför summan av alla element i grannmatrisen för G är två gånger antalet av kanter i G .
- (iii) Är G Eulerisk? Motivera ditt svar. [1.5p]
- (b) Använd *Dijkstras algoritm* för att bestämma en kortaste stig från hörn x till hörn y i följande viktade graf. Redovisa gången i lösningen, dvs. ur din lösning ska det framgå i vilken ordning hörnen behandlas, hur hörnen märks och hur märkena ändras när du arbetar dig igenom algoritmen. Ange också kortaste stigens längd. [1.5p]



Uppgift 7

- (a) Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Rita G .
(ii) Är G *bipartit*? Motivera ditt svar! [1.5]
- (b) Definiera vad som menas med att två enkla grafer är *isomorfa*. [0.5]
- (c) Låt H vara grafen med hörnmängd $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ och kantmängd

$$E(H) = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, d), (c, f), (d, e)\}.$$

Är G och H isomorfa? Motivera ditt svar! [1]

Uppgift 8

- (a) (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod{7}$.
(ii) Ange de 7 kongruensklasserna för kongruensrelationen $a \equiv b \pmod{7}$ på $\mathbb{Z}$.
(iii) Beskriv mängden $\mathbb{Z}_7$.
(iv) Ange multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_7$. [1.5p]
- (b) (i) Använd *Euklides algoritmen* för att visa att $\text{sgd}(1621, 1261) = 1$.
(ii) Finn två heltal s och t sådana att

$$1261s + 1621t = 1.$$

- (iii) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{1621}$ till ekvationen

$$[1261] \odot [x] = [2].$$

Visa dina uträkningar! [1.5p]