

Lösningsförslag

Algebra och Diskret Matematik A 21 mars 2006

1. a)

- i) Uttrycker varje hexadecimal siffra som sin binära motsvarighet.

$$(A80C)_{16} = (1010100000001100)_2$$

- ii) Uttryck siffrornas vikt i det hexadecimala talsystemet

$$\begin{aligned}(A80C)_{16} &= 10 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = \\ &= (43020)_{10}\end{aligned}$$

b)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kan skrivas

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

c)

$$\sum_{n=15}^{150} (3n+2) = \sum_{n=1}^{150} (3n+2) - \sum_{n=1}^{14} (3n+2) =$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{150} n + \sum_{n=1}^{150} 2 - 3 \sum_{n=1}^{14} n - \sum_{n=1}^{14} 2 =$$

$$= 3 \cdot \frac{150 \cdot 151}{2} + 150 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{14 \cdot 15}{2} - 14 \cdot 2 =$$

$$= 33932$$

Svar: 33932

2. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras av $S_n = \sum_{r=1}^n r^2$, $n \geq 1$

a)

$$S_1 = \sum_{r=1}^1 r^2 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = \sum_{r=1}^2 r^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$S_3 = \sum_{r=1}^3 r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$S_4 = \sum_{r=1}^4 r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$S_5 = \sum_{r=1}^5 r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$S_6 = \sum_{r=1}^6 r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

b)

Vill visa att

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad * \text{ för alla } n \geq 1$$

I Visar att * är sann för $n=1$

$$VL = \sum_{r=1}^1 r^2 = 1^2 = 1$$

$$HL = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$VL = HL$ så * är sann för $n=1$

II Antag att * är sann för $n=p$, $p \geq 1$.

$$\sum_{r=1}^p r^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \quad **$$

Visar att * då också är sann för $n=p+1$

2. forts

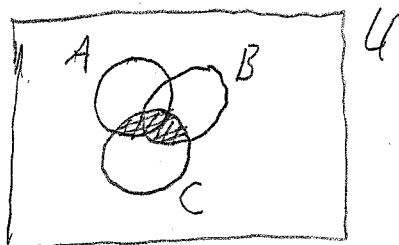
$$\begin{aligned} VL &= \sum_{r=1}^{p+1} r^2 = \sum_{r=1}^p r^2 + (p+1)^2 = [\text{Enligt } **] = \\ &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{(p+1)}{6} (p(2p+1) + 6(p+1)) = \\ &= \frac{(p+1)}{6} (2p^2 + 7p + 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HL &= \frac{(p+1)(p+1+1)(2(p+1)+1)}{6} = \frac{(p+1)}{6} (p+2)(2p+3) = \\ &= \frac{(p+1)}{6} (2p^2 + 7p + 6) \end{aligned}$$

$\forall$ har att $VL = HL$ så $*$ är sann för $n = p+1$

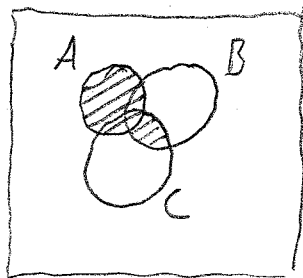
III Enligt induktionsaxiomet ger I och II att
 $*$ är sann för alla heltal $n \geq 1$

3. a



$$X = (A \cup B) \cap C$$

ii/



$$Y = A \cup (B \cap C)$$

$X \neq Y$ Låt t.ex.

$A = \{1\}$, $B = \{2\}$ och $C = \{3\}$

då är $X = \emptyset$ men $Y = \{1\}$

iii/ Låt $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ och $C = \{1, 2, 3\}$

3. b)

$$M_1 = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}, \dots \right\}$$

Med inklusionsregler får vi

$$M_1 = \left\{ x : x = \frac{2k+2}{2k+1}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

c)

i) $M_2 = \{x \in \mathbb{N} : 3x^2 - 7x - 6 = 0\}$

söker rötterna till $3x^2 - 7x - 6 = 0$

$$x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$$

$$x = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{72}{36}} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{7}{6} \pm \frac{11}{6}$$

så rötterna är $x = \frac{18}{6} = 3$ och $x = -\frac{4}{6}$

så $M_2 = \{x \in \mathbb{N} : 3(x-3)(x+\frac{4}{6}) = 0\}$

Den enda roten som är ett naturligt tal är 3

så $M_2 = \{3\}$

ii) $L = \{x, 1, 4, 2\}$

$$P(L) = \{\emptyset, \{x\}, \{1\}, \{4\}, \{2\}, \{x, 1\}, \{x, 4\}, \{x, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 2\}, \{4, 2\}, \{x, 1, 4\}, \{x, 1, 2\}, \{x, 4, 2\}, \{1, 4, 2\}, \{x, 1, 2\}, \{x, 1, 4, 2\}\}$$

4.

a)

i) En relation R är reflexiv om det för alla $x \in S$ gäller att xRx .

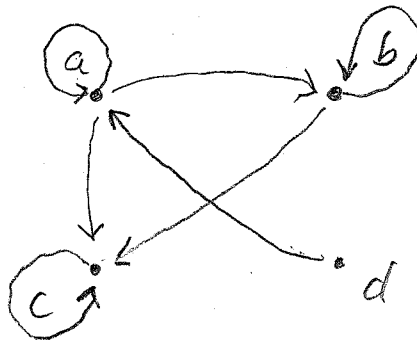
ii) En relation R är symmetrisk om det för alla $x, y \in S$ där xRy också gäller att yRx .

iii) En relation R är transitiv om det för alla $x, y, z \in S$ där xRy och yRz gäller att xRz .

4. a) iv) En relation R är antisymmetrisk om det för alla $x, y \in S$ där xRy och yRx gäller att $x=y$.

b) $S = \{a, b, c, d\}$ $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c), (d,a)\}$

i)



ii) Den minsta mängd av par som måste läggas till för att R skall bli symmetrisk är

$\{(c,a), (b,a), (c,b), (a,d)\}$

iii) Den minsta mängd av par som måste läggas till för att R skall bli reflexiv är

$\{(d,d)\}$

iv) Den minsta mängd av par som måste läggas till för att R skall bli transitiv är

$\{(d,b), (d,c)\}$

v) Digrafen innehåller inga parallella kanter så relationen är antisymmetrisk.

5. a) Antalet strängar ges av antalet sätt att välja 5 objekt av 7 utan ordning.

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \quad \text{Rätt svar alltså V}$$

- b) Eftersom en funktion med definitionsmängd $\mathbb{Z}$ endast kan vara injektiv om bildmängden är oändlig så kan f inte vara injektiv

Rätt svar i)

- c) Rätt svar är i) eftersom $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 10 \cdot 12 = 120$

- d) Det kontra positiva påståendet till

$$\text{Om } n^2 - 4 < 0 \text{ så är } -2 < n < 2$$

är

$$\text{Om } n \leq -2 \text{ eller } n \geq 2 \text{ så är } n^2 - 4 \geq 0$$

Vilket omskrivet är detsamma som i/

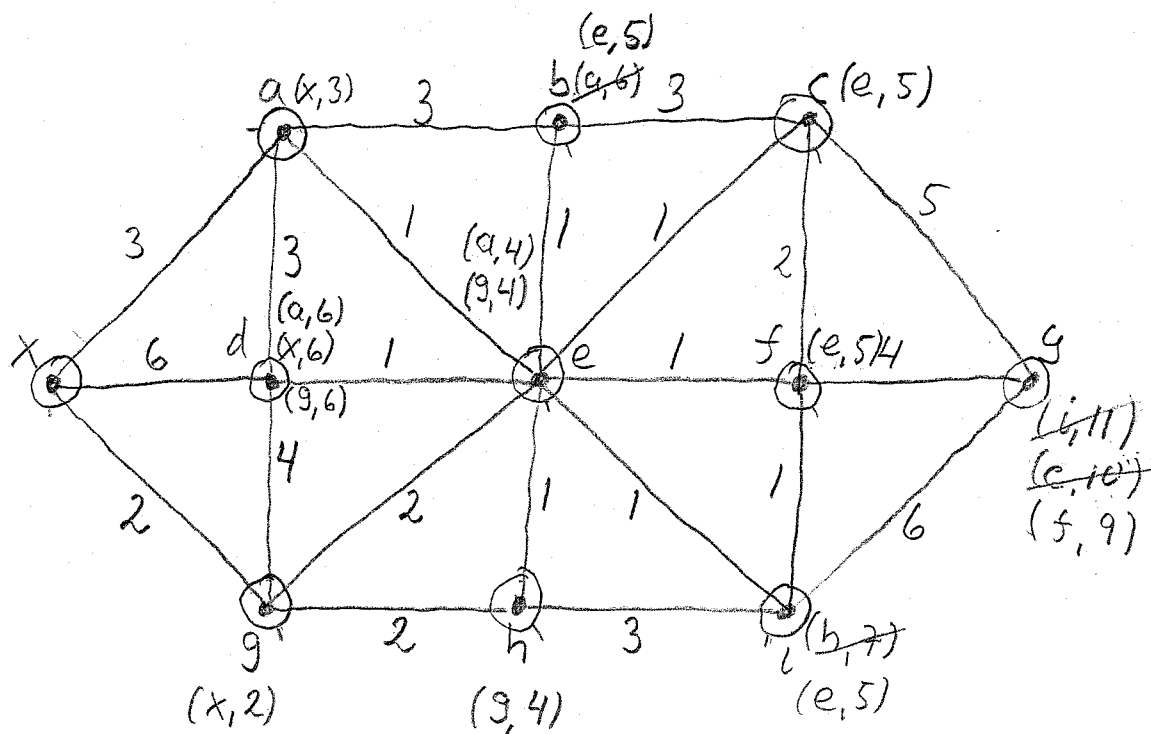
6. a) i)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1	0	0	1	1
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	1	1	1	0	1
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0

- ii) Eftersom en kant mellan ett hörn a och ett hörn b kommer att räknas en gång i en kolumn och en gång i en rad, så räknas varje kant två gånger.

- iii) Alla hörn har jämnt gradtal, så vi kan hitta en Eulercykel, d.v.s. G Eulersk

6b)

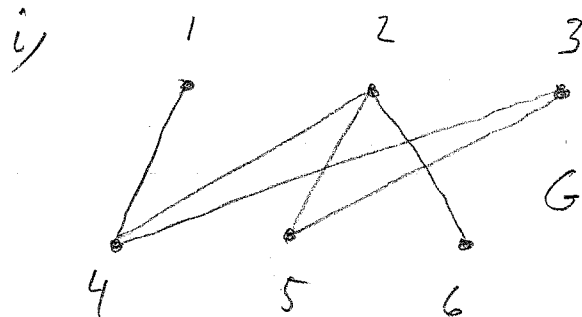


En kortaste stig ges av

(x, a, e, f, g)

av vikt $3 + 1 + 1 + 4 = 9$

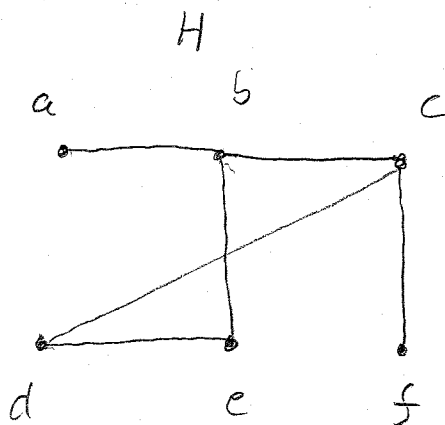
7. a)



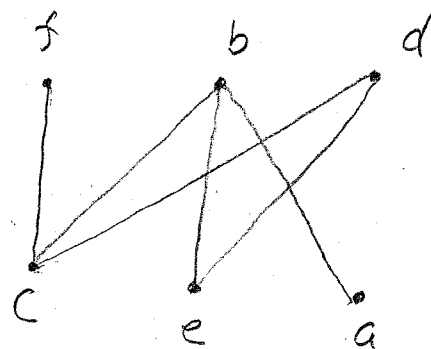
ii) Ja med
hörn mängderna
 $\{1, 2, 3\}$ och $\{4, 5, 6\}$
finns det bara
kanter mellan hörn mängder,
ej inom dem.

b) Två enkla grafer G och H är isomorfa om vi kan hitta en bijektiv funktion f mellan hörn mängderna för G och H så att om (a, b) är en kant i G så är $(f(a), f(b))$ en kant i H .

7 c)



eller



En isomorfi ges av funktionen p

där $p(1) = f$ $p(2) = b$ $p(3) = d$

$p(4) = c$ $p(5) = e$ $p(6) = a$

så G och H är isomorfa.

8 a)

i) Att $a \equiv b \pmod{7}$ betyder att
för $a, b \in \mathbb{Z}$ så gäller $a - b = 7k$ för något $k \in \mathbb{Z}$

ii)

$$[0] = \{ \dots, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots \}$$

$$[1] = \{ \dots, -13, -6, 1, 8, 15, 22, \dots \}$$

$$[2] = \{ \dots, -12, -5, 2, 9, 16, 23, \dots \}$$

$$[3] = \{ \dots, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \dots \}$$

$$[4] = \{ \dots, -10, -3, 4, 11, 18, 25, \dots \}$$

$$[5] = \{ \dots, -9, -2, 5, 12, 19, 26, \dots \}$$

$$[6] = \{ \dots, -8, -1, 6, 13, 20, 27, \dots \}$$

iii)

$$\mathbb{Z}_7 = \{ [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6] \}$$

8. a) i v)

$$\odot \begin{array}{c} [0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] \\ [0] 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ [1] 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ [2] 0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 1 \ 3 \ 5 \\ [3] 0 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5 \ 1 \ 4 \\ [4] 0 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2 \ 6 \ 3 \\ [5] 0 \ 5 \ 3 \ 1 \ 6 \ 4 \ 2 \\ [6] 0 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{array}$$

b) i) söker $\text{sgd}(1621, 1261)$

Euklides algoritmen

$$1621 = 1261 + 360$$

$$1261 = 3 \cdot 360 + 181$$

$$360 = 1 \cdot 181 + 179$$

$$181 = 1 \cdot 179 + 2$$

$$179 = 89 \cdot 2 + 1$$

$$\text{så } \text{sgd}(1621, 1261) = 1$$

ii) Euklides baklänges

$$1 = 179 - 89 \cdot 2$$

$$2 = 181 - 179$$

$$179 = 360 - 181$$

$$181 = 1261 - 3 \cdot 360$$

$$360 = 1621 - 1261$$

$$1 = 179 - 89 \cdot 2 =$$

$$= 179 - 89(181 - 179) = 90 \cdot 179 - 89 \cdot 181$$

$$= 90(360 - 181) - 89 \cdot 181 = 90 \cdot 360 - 179 \cdot 181$$

$$= 90 \cdot 360 - 179(1261 - 3 \cdot 360) =$$

$$= -179 \cdot 1261 + 627 \cdot 360 =$$

$$= -179 \cdot 1261 + 627(1621 - 1261) =$$

$$= 627 \cdot 1621 - 806 \cdot 1261$$

$$\text{så } s = -806 \text{ och } t = 627 \text{ ger att}$$

$$1261s + 1621t = 1$$

iii) Multiplicera ovanstående linjärkombination med 2

$$1261(-1612) + 1621 \cdot 1254 = 2. \text{ Vilket ger}$$

$$[1261]_{1621} \odot [-1612]_{1621} = [1261] \odot [9] = [2] \quad \text{så } [x]_{1621} = [9]_{1621}$$