## MITTUNIVERSITETET

## TFM

## Tentamen 2006

## MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

**Skrivtid: 5 timmar**

**Datum: 5 juni 2006**

---

*Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.*

*Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!*

**Behandla högst en uppgift på varje papper!**

**Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.**

*LYCKA TILL!!*

---

**Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!**

**Den här tentan gäller kursen med**

**[Johnsonbaugh]**

**som kursbok.**

---

**Uppgift 1**

(a) Uttryck det binära talet $(11011100001001010)_2$

(i) som ett hexadecimalt tal;

(ii) i basen 10. [1p]

(b) Ange följande formel m.h.a. summatecken:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[1p]

(c) Beräkna följande summa m.h.a. formeln i (b):

$$\sum_{n=20}^{200} (2n+1)^2.$$

[1p]

**Uppgift 2**

Talföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras genom

$$s_n = \sum_{r=0}^{n} (r+1)^2 \quad \text{för } n \geq 1.$$

(a) Beräkna $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ och $s_6$.
Visa dina uträkningar. [1p]

(b) Bevisa med induktion att

$$s_n = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

för alla $n \geq 1$. [2p]

**Uppgift 3**

(a) Låt $A$,$B$ och $C$ vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.

(i) Markera området $X = (A \cup B) \cap \overline{C}$ i ett Venndiagram.

(ii) Låt $Y = A \cup (B \cap \overline{C})$. Avgör om $X = Y$ för *alla* val av $A$, $B$ och $C$. Motivera ditt svar.

(iii) Finn tre icke-tomma mängder av positiva heltal $A$, $B$ och $C$ sådana att

$$(A \cup B) \cap \overline{C} = A \cup (B \cap \overline{C}).$$

[1.5p]

(b) Ange mängden

$$M_1 = \{0, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{6}{7}, \tfrac{8}{9}, -\tfrac{10}{11}, \ldots\}$$

med hjälp av inklusionsregler.

[0.5p]

(c) Ange följande mängder genom att lista elementen.

(i) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 + 2x - 3 = 0\}$;

(ii) $\mathcal{P}(M_2 \cup \{0\})$.

[1p]

**Uppgift 4**

(a) Förklara vad som menas med att en relation $R$ på en mängd $S$ är

(i) reflexiv;

(ii) symmetrisk;

(iii) transitiv;

(iv) antisymmetrisk.

[1p]

(b) Låt $R$ vara följande relation på mängden $S = \{w, x, y, z\}$.

$$R = \{(w,w), \quad (w,y), \quad (x,w), \quad (x,x), \quad (y,w), \quad (y,z), \quad (z,w)\}$$

(i) Rita relationsgrafen för $R$.

(ii) Relationen $R$ är inte symmetrisk. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till $R$ för att $R$ skall bli symmetrisk.

(iii) Relationen $R$ är inte reflexiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till $R$ för att $R$ skall bli reflexiv.

(iv) Relationen $R$ är inte transitiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till $R$ för att $R$ skall bli transitiv.

(v) Är relationen $R$ antisymmetrisk? Motivera ditt svar! [2p]

**Uppgift 5**

Bestäm vilket/vilka alternativ som är korrekt/a i det följande. Ge en kort motivering för alla dina svar.

(a) Antalet 8-siffriga binära strängar som innehåller precis 3 nollor är

(i) $8 \cdot 7 \cdot 6$

(ii) $8 \cdot 7$

(iii) $2^3$

(iv) $8^3$

(v) $2^5 \cdot 3$ [0.75p]

(b) En funktion $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3\}$

(i) är aldrig injektiv

(ii) är alltid injektiv

(iii) är aldrig surjektiv

(iv) är alltid surjektiv [0.75p]

(c) För alla mängder $A$ och $B$ gäller att
om $|A| = 5$ och $|B| = 10$ så är

(i) $|B - A| = 5$

(ii) $|A \cup B| = 15$

(iii) $|A \cup B| < 15$

(iv) $|A \times B| = 75$ [0.75p]

(d) Låt $n$ vara ett heltal. Påståendet

‘om $n^2 - 1 < 0$ så är $-1 < n < 1$’

är det kontrapositiva påståendet till

(i) ‘om $1 > n > -1$ så är $n^2 - 1 \geq 0$’

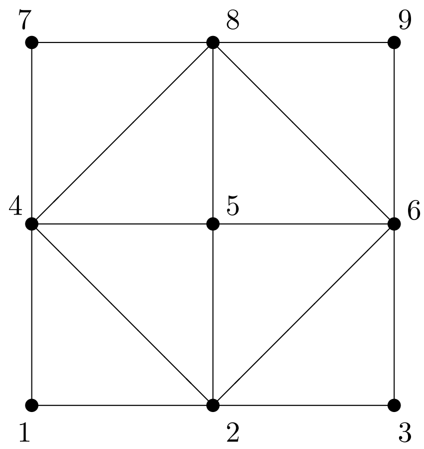
(ii) ‘$n^2 - 1 \geq 0$ om $-1 \geq n$ eller $n \geq 1$’

(iii) ‘om $-1 \geq n$ och $n \geq 1$ så är $n^2 - 1 \geq 0$’

(iv) ‘om $n^2 - 1 \geq 0$ så är $-1 \geq n$ eller $n \geq 1$’ [0.75p]

**Uppgift 6**

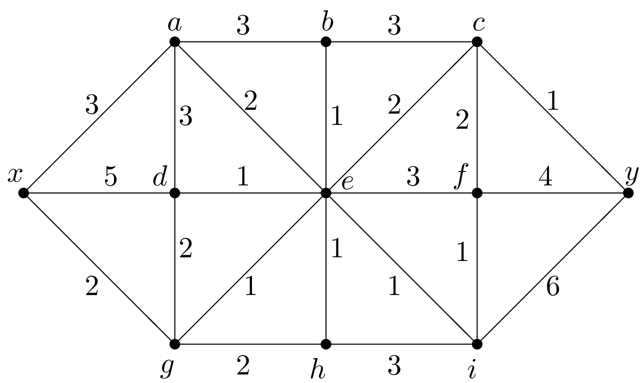
(a) (i) Ange en grannmatris för följande graf $G$:




(ii) Förklara varför summan av alla element i grannmatrisen för $G$ är två gånger antalet av kanter i $G$.

(iii) Är $G$ Eulerisk? Bevisa ditt svar. [1.5p]

(b) Använd *Dijkstras algoritm* för att bestämma en kortaste stig från hörn $x$ till hörn $y$ i följande viktade graf. Redovisa gången i lösningen, dvs. ur din lösning ska det framgå i vilken ordning hörnen behandlas, hur hörnen märks och hur märkena ändras när du arbetar dig igenom algoritmen.
Ange också kortaste stigens längd. [1.5p]



**Uppgift 7**

(a) Låt $G$ vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Rita $G$.

(ii) Är $G$ *bipartit*? Motivera ditt svar! [1.5]

(b) Definiera vad som menas med att två enkla grafer är *isomorfa*. [0.5]

(c) Låt $H$ vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och kantmängd

$$E(H) = \{(1,2),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,6),\ (4,5)\}.$$

Är $G$ och $H$ isomorfa? Motivera ditt svar! [1]

**Uppgift 8**

(a) (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod 3$.

(ii) Visa att om $a \equiv b \pmod 3$ och $c \equiv d \pmod 3$ så är $ad \equiv bc \pmod 3$.

(iii) Ange de 3 kongruensklasserna för kongruensrelationen $a \equiv b \pmod 3$ på $\mathbb{Z}$ och beskriv mängden $\mathbb{Z}_3$.

(iv) Ange additionstabellen och multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_3$. [1.5p]

(b) (i) Använd *Euklides algoritm* för att visa att $\text{sgd}(1721, 1271) = 1$.

(ii) Finn två heltal $s$ och $t$ sådana att

$$1271s + 1721t = 1.$$

(iii) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{1721}$ till ekvationen

$$[1271] \odot [x] = [3].$$

Visa dina uträkningar! [1.5p]