

MID SWEDEN UNIVERSITY

TFM

Examination 2006

MAAA99 Algebra and Discrete Mathematics (English)

Time: 5 hours

Date: 22 August 2006

There are EIGHT questions on this paper and each question carries three points. The maximum number of points available is 24. The points for each part of a question are indicated at the end of the part in []-brackets. Ten points are needed for the mark G and eighteen points are required for the mark VG.

The candidates are advised that they must always show their working, otherwise they will not be awarded full marks for their answers.

The candidates are further advised to start each of the eight questions on a new page and to clearly label all their answers.

This is a closed book examination. No books, notes or mobile telephones are allowed in the examination room. Note that a collection of formulas is attached to the paper.

Electronic calculators may be used provided they cannot handle formulas. The make and model used must be specified on the cover of your script.

GOOD LUCK!!

Make sure that you are doing the right Discrete Mathematics A paper! This paper is for the course which used

[Johnsonbaugh]

as coursebook.

Question 1

(a) Express the binary number $(100001110010101111)_2$

(i) in hexadecimal;

(ii) in base 10. [1p]

(b) Express the following formula by using Σ -notation.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

[1p]

(c) Use the formula from (b) to compute the sum

$$\sum_{n=100}^{300} (2n - 1).$$

[1p]

Question 2

The sequence $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is defined by

$$S_n(x) = \sum_{r=0}^n x^r, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

(a) Showing all your working, compute $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$ and $S_4(x)$. [1p]

(b) Prove by induction that

$$S_n(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

for all $x \neq 1, n \geq 1$. [1.5p]

(c) Compute $S_n(1)$ for $n \geq 1$. [0.5p]

Question 3

(a) Let A, B and C be subsets of the universal set $\mathcal{U}$.

(i) Shade the area corresponding to the set $X = (A \cup B) \cap \overline{C}$ in a Venn diagram.

(ii) Let $Y = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$. Decide whether $X = Y$ for *all* possible choices of A, B and C . Prove your answer! [1.5p]

(b) Give the set

$$M_1 = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \frac{8}{81}, \frac{10}{243}, \dots \right\}$$

by using rules of inclusion.

[0.5p]

(c) Give the following sets by the listing method.

(i) $M_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5x^2 + 2x - 3 = 0\};$

(ii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

[1p]

Question 4

(a) Explain what it means for a relation R on a set S to be an equivalence relation.

[0.5p]

(b) Let R be the relation on the set $S = \{w, x, y, z\}$ given by

$$R = \{(w, w), (x, y), (y, z), (z, x)\}$$

(i) Draw the relation digraph for R .

(ii) The relation R is not reflexive. List the smallest set of pairs which must be added to R to make it reflexive.

(iii) The relation R is not symmetric. List the smallest set of pairs which must be added to R to make it symmetric.

(iv) The relation R is not transitive. List the smallest set of pairs which must be added to R to make it transitive.

(v) Suppose that all the pairs you listed in (iii) and (iv) are added to R , does this make R an equivalence relation? Justify your answer! [2.5p]

Question 5

- (a) Give the truth table for $p \Rightarrow q$. [0.5p]
- (b) Give the truth table for $\neg p \vee q$. [0.5p]
- (c) Let a, b and n be positive integers. For each of the following propositions say whether it is true or false and give a counterexample for each false proposition.
- (i) $n > 0$;
 - (ii) $n > 0 \Rightarrow n \geq 1$;
 - (iii) $n \geq 1$;
 - (iv) $n > 1 \Rightarrow a > b$;
 - (v) $n < 1 \Rightarrow a > b$;
 - (vi) $a > 1$ or $b > 5 \Rightarrow ab \geq 10$;
 - (vii) $a > 1$ and $b > 5 \Rightarrow ab \geq 10$;
 - (viii) $n|ab \Rightarrow n|a$ or $n|b$. [2p]

Question 6

- (a) How many positive integers less than 1000 are
- (i) a multiple of 3?
 - (ii) not a multiple of 5?
 - (iii) not a multiple of 2, 3 or 5? [1.5p]
- (b) A PIN-number for a credit card consists of an ordered sequence of 4 digits from the set $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. How many PIN-numbers exist
- (i) if repeated digits are allowed?
 - (ii) with four distinct digits?
 - (iii) which do not contain the digit 0? [1.5p]

Question 7

Let G be the graph with vertex set $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and let H be the graph with vertex set $V(H) = \{a, b, c, d, e, f\}$ and edge set

$$E(H) = \{ab, ac, bd, be, cd, ce, fd, fe\}.$$

- (a) Draw G and H .
- (b) What does it mean for a graph to be *bipartite*?
- (c) Justifying your answer, say whether G is bipartite.
- (d) When are two simple graphs said to be *isomorphic*?
- (e) Justifying your answer, say whether G and H are isomorphic. [3]

Question 8

- (a)
 - (i) Define what it means to say that $a \equiv b \pmod{5}$.
 - (ii) Prove that if $a \equiv b \pmod{5}$ and $c \equiv d \pmod{5}$ then $ac \equiv bd \pmod{5}$.
 - (iii) Give the 5 congruence classes for the congruence relation $a \equiv b \pmod{5}$ on $\mathbb{Z}$ and describe the set $\mathbb{Z}_5$.
 - (iv) Give the addition and multiplication tables for $\mathbb{Z}_5$. [1.5p]
- (b)
 - (i) Using *Euclid's Algorithm*, show that $\gcd(1721, 1271) = 1$.
 - (ii) Find two integers s and t such that

$$1271s + 1721t = 1.$$

- (iii) Showing all your working, find all solutions $[x] \in \mathbb{Z}_{1271}$ of the equation

$$[1721] \odot [x] = [5].$$

[1.5p]

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2006

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 22 augusti 2006

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

(a) Uttryck det binära talet $(100001110010101111)_2$

(i) som ett hexadecimalt tal;

(ii) i basen 10.

[1p]

(b) Ange följande formel m.h.a. summatecken:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

[1p]

(c) Beräkna följande summa m.h.a. formeln i (b):

$$\sum_{n=100}^{300} (2n - 1).$$

[1p]

Uppgift 2

Talföljden $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ definieras genom

$$S_n(x) = \sum_{r=0}^n x^r, \quad \text{för } x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

(a) Beräkna $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ och $S_4(x)$.

Visa dina uträkningar.

[1p]

(b) Bevisa med induktion att

$$S_n(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

för alla $x \neq 1, n \geq 1$.

[1.5p]

(c) Beräkna $S_n(1)$ för $n \geq 1$.

[0.5p]

Uppgift 3

(a) Låt A, B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.

(i) Markera området $X = (A \cup B) \cap \overline{C}$ i ett Venndiagram.

(ii) Låt $Y = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$. Avgör om $X = Y$ för *alla* val av A, B och C . Bevisa ditt svar. [1.5p]

(b) Ange mängden

$$M_1 = \{\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \frac{8}{81}, \frac{10}{243}, \dots\}$$

med hjälp av inklusionsregler.

[0.5p]

(c) Ange följande mängder genom att lista elementen.

(i) $M_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5x^2 + 2x - 3 = 0\};$

(ii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

[1p]

Uppgift 4

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är en ekvivalensrelation. [0.5p]

(b) Låt R vara följande relation på mängden $S = \{w, x, y, z\}$.

$$R = \{(w, w), (x, y), (y, z), (z, x)\}$$

(i) Rita relationsgraf för R .

(ii) Relationen R är inte reflexiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli reflexiv.

(iii) Relationen R är inte symmetrisk. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli symmetrisk.

(iv) Relationen R är inte transitiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli transitiv.

(v) Blir R en ekvivalensrelation om alla par du angav i (iii) och (iv) läggs till R ? Motivera ditt svar! [2.5p]

Uppgift 5

- (a) Ange en sanningsstabell för $p \Rightarrow q$. [0.5p]
- (b) Ange en sanningsstabell för $\neg p \vee q$. [0.5p]
- (c) Låt a, b och n vara positiva heltal. Ange om följande påståenden är sanna eller falska. Ge ett motexempel om ett påstående är falskt.
- (i) $n > 0$;
 - (ii) $n > 0 \Rightarrow n \geq 1$;
 - (iii) $n \geq 1$;
 - (iv) $n > 1 \Rightarrow a > b$;
 - (v) $n < 1 \Rightarrow a > b$;
 - (vi) $a > 1$ eller $b > 5 \Rightarrow ab \geq 10$;
 - (vii) $a > 1$ och $b > 5 \Rightarrow ab \geq 10$;
 - (viii) $n|ab \Rightarrow n|a$ eller $n|b$. [2p]

Uppgift 6

- (a) Hur många positiva heltal mindre än 1000 är
- (i) en multipel av 3?
 - (ii) inte en multipel av 5?
 - (iii) inte en multipel av 2, 3 eller 5? [1.5p]
- (b) En PIN-kod för ett kreditkort består av en ordnad sekvens av 4 siffror från mängden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hur många PIN-koder
- (i) finns det om repetition av siffror är tillåtet?
 - (ii) har 4 olika siffror?
 - (iii) innehåller *inte* siffran 0? [1.5p]

Uppgift 7

Låt G vara grafen med hörnmängd $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och grannmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och låt H vara grafen med hörnmängd $V(H) = \{a, b, c, d, e, f\}$ och kantmängd

$$E(H) = \{ab, ac, bd, be, cd, ce, fd, fe\}.$$

- (a) Rita G och H .
- (b) Definiera vad som menas med att en graf är *bipartit*.
- (c) Är G bipartit? Motivera ditt svar.
- (d) Definiera vad som menas med att två grafer är *isomorfa*.
- (e) Är G och H isomorfa? Motivera ditt svar. [3]

Uppgift 8

- (a)
 - (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod{5}$.
 - (ii) Visa att om $a \equiv b \pmod{5}$ och $c \equiv d \pmod{5}$ så är $ac \equiv bd \pmod{5}$.
 - (iii) Ange de 5 kongruensklasserna för kongruensrelationen $a \equiv b \pmod{5}$ på $\mathbb{Z}$ och beskriv mängden $\mathbb{Z}_5$.
 - (iv) Ange additionstabellen och multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_5$. [1.5p]
- (b)
 - (i) Använd *Euklides algoritmen* för att visa att $\text{sgd}(1721, 1271) = 1$.
 - (ii) Finn två heltal s och t sådana att

$$1271s + 1721t = 1.$$

- (iii) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{1271}$ till ekvationen

$$[1721] \odot [x] = [5].$$

Visa dina uträkningar! [1.5p]

MAAA99

ALGEBRA OCH DISKRET MATEMATIK FORMLER OCH SYMBOLER

SYMBOLER FÖR RELATIONER MELLAN TAL

$a = b$	a är lika med b
$a \neq b$	a är inte lika med b
$a < b$	a är strikt mindre än b
$a > b$	a är strikt större än b
$a \leq b$	a är mindre än eller lika med b
$a \geq b$	a är större än eller lika med b
$a b$	heltalet a delar heltalet b

NÅGRA RÄKNELAGAR FÖR HELTAL

Associativa lagar:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Kommutativa lagar:	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Distributiva lagen:	$a(b + c) = ab + ac$	
Lagen om nolldelare:	Om $ab = 0$ så är $a = 0$ eller $b = 0$	

NÅGRA TALMÄNGDER

$\emptyset$	den tomma mängden $\{ \}$
$\mathbb{Z}$	mängden av heltal $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$
$\mathbb{Z}_+$	mängden av positiva heltal $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}_-$	mängden av negativa heltal $\{ \dots, -3, -2, -1 \}$
$\mathbb{N}$	mängden av de naturliga talen $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\{x \in \mathbb{Z} P\}$	mängden av alla x i $\mathbb{Z}$ som uppfyller egenskap P
$\{x \in \mathbb{Z} : P\}$	är detsamma som $\{x \in \mathbb{Z} P\}$
$\mathbb{Q}$	mängden av de rationella talen $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
$\mathbb{Q}_+$	mängden av de positiva rationella talen $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$
$\mathbb{Q}_-$	mängden av de negativa rationella talen $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$
$\mathbb{R}$	mängden av de reella talen
$\mathbb{R}_+$	mängden av de positiva reella talen $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{R}_-$	mängden av de negativa reella talen $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$
$[a, b]$	det slutna intervallet från a till b , dvs. $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$]a, b[$	det öppna intervallet från a till b , dvs. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

SYMBOLER ANG. MÄNGDER

$A = B$	A är lika med B
$A \neq B$	A är inte lika med B
$a \in A$	elementet a tillhör mängden A
$a \notin A$	elementet a tillhör inte mängden A
$A \cup B$	unionen av A och B , dvs. $\{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$
$A \cap B$	snittet av A och B , dvs. $\{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$
$A - B$	mängddifferensen av A och B , dvs. $\{x \in A : x \notin B\}$
$\overline{B}$	komplementmängden till B , dvs. om B är en delmängd av grundmängden $\mathcal{U}$ så är $\overline{B} = \{x \in \mathcal{U} : x \notin B\}$
$A \subseteq B$	A är en delmängd av B , dvs. $x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \subset B$	A är en äkta delmängd av B , dvs. $A \subseteq B$ och $A \neq B$
$A \times B$	den cartesiska produkten av A och B , dvs. mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$
$\mathcal{P}(A)$	potensmängden till A , dvs. mängden av alla delmängder av A

NÅGRA RÄKNELAGAR FÖR MÄNGDER

Associativa lagar:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativa lagar:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva lagar:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgans lagar:	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

SYMBOLER ANG. LOGIK

$\neg p$	icke p
$p \vee q$	p eller q
$p \wedge q$	p och q
$p \Rightarrow q$	p medför q
$p \Leftrightarrow q$	p är ekvivalent med q

NÅGRA LAGAR FÖR LOGIK

Associativa lagar:	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Kommutativa lagar:	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Distributiva lagar:	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
De Morgans lagar:	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

NÅGRA LOGISKA EKVIVALENSER FÖR BEVISFÖRING

Att bevisa $p \Leftrightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa att $p \Rightarrow q$ och $q \Rightarrow p$

Att bevisa $p \Rightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa $\neg q \Rightarrow \neg p$

LÖSNING AV ANDRAGRADSEKVATIONER

Andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ där $a \neq 0$ har rötterna $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

NÅGRA STANDARDSUMMOR

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{r=0}^n x^r = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ där det reella talet } x \neq 1$$

DE POSITIVA PRIMTALEN ≤ 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97