

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2007

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 9 januari 2007

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

(a) Uttryck det decimala talet $(1273)_{10}$

(i) som ett binärt tal;

(ii) som ett hexadecimalt tal.

[1p]

(b) Ange följande formler m.h.a. summatecken:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[1p]

(c) Beräkna följande summa m.h.a. formlerna i (b):

$$\sum_{j=3}^{150} ((j+1)^3 - 5j + 2).$$

[1p]

Uppgift 2

(a) Låt A, B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$. Markera området $X = (A \cap (\overline{B \cup C})) \cup ((B \cap C) \cap \overline{A})$ i ett Venndiagram.

[1p]

(b) Låt $Y = \{d \in \mathbb{Z}^+ : d|20\}$

(i) Ange mängden Y genom att lista elementen.

(ii) Låt $f : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ vara en funktion given av att $f(x) = x^2$. Ange funktionen genom att göra en värdetabell. Avgör med hjälp av tabellen om funktionen f är injektiv och/eller surjektiv.

[1p]

(c) Hur många kåkar finns det i en kortlek? En kortlek består av 52 kort med fyra färger och tretton valörer i varje färg. En kåk består av en triss och ett par.

[1p]

Uppgift 3

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd X är

- (i) reflexiv;
- (ii) symmetrisk;
- (iii) transitiv;
- (iv) en ekvivalensrelation. [1p]

(b) Definiera relationen R på mängden $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ genom att

$$(x_1, x_2) \in R \text{ om } x_1 \leq x_2.$$

Avgör om R är

- (i) en partiell ordning;
- (ii) en ekvivalensrelation. [1p]

(c) Ge ett exempel på en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$ vars två ekvivalensklasser är de jämna och udda heltal. Argumentera för att den relation du angett är en ekvivalensrelation. [1p]

Uppgift 4

Bevisa med induktion att

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

för alla heltal $n \geq 1$. [3p]

Uppgift 5

Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ definieras genom rekursionsformeln

$$a_{n+2} = -6a_{n+1} - 9a_n \quad \text{för } n \geq 0$$

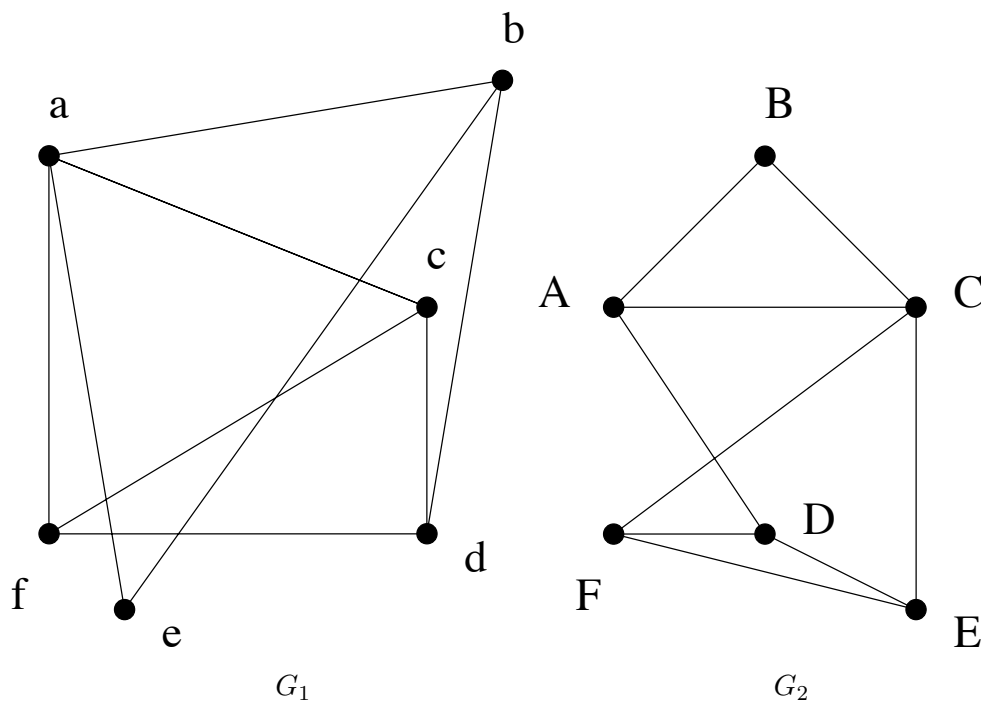
och begynnelsevillkoren $a_0 = -1$ och $a_1 = 1$.

- (a) Använd rekursionsformeln för att beräkna a_2, a_3, a_4, a_5 och a_6 .
Visa dina uträkningar. [1p]
- (b) Lös rekursionsformeln, d.v.s. hitta a_n som funktion av n för alla $n \geq 0$. [2p]

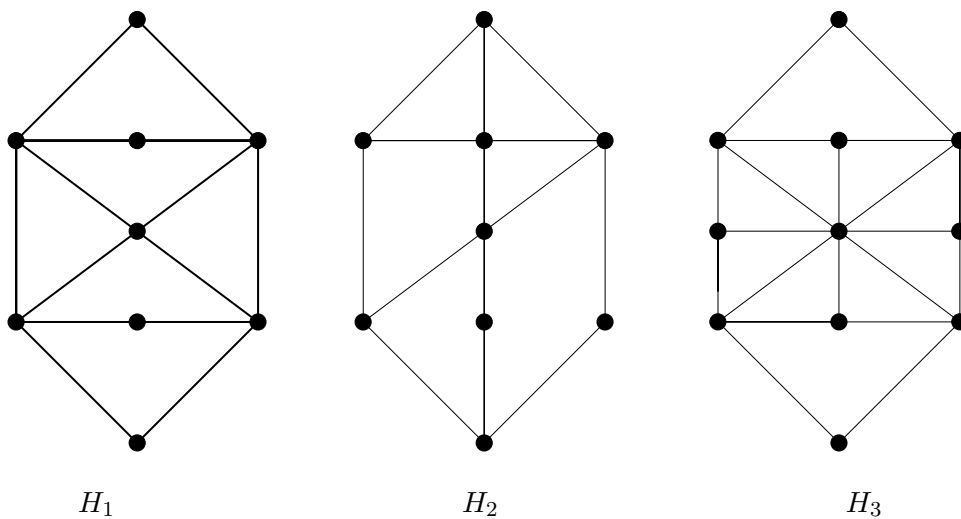
Uppgift 6

- (a) (i) Definiera vad som menas med att två enkla grafer är isomorfa.
(ii) Hitta en isomorfi mellan graferna G_1 och G_2 .

[1p]



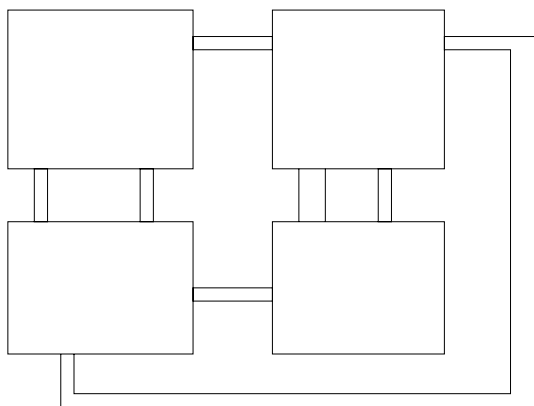
- (b) Avgör för var och en av nedanstående grafer H_1 , H_2 och H_3 om den är
(i) Hamiltonsk;
(ii) Eulersk. Motivera dina svar!



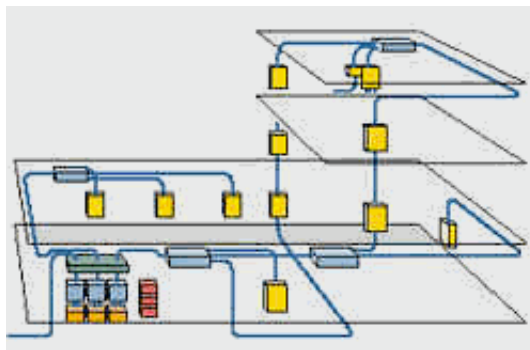
[1p]

- (c) Lille Sam, 3 år, har en vän Pia, som byggt ett rörpostsystem mellan de fyra rummen i hennes hus. Sam har bestämt att han också vill ha ett rörpostsystem, eftersom han sett hur mycket glädje det har skänkt Pia's familj när de skickar meddelanden fram och tillbaka mellan rummen via systemet. Sam har bara tre rum hemma i sitt hus, och hans idealsystem har tre rör i sovrummet och två rör i vart och ett av de övriga rummen. Sam är inte speciellt glad för han kan inte komma på hur han kan bygga sitt rörpostsystem som han vill. En vacker dag kommer Sam's kompis Pia på besök och säger att Sam's idé är omöjlig. Varför säger hon det?

Tips: Sam har gjort följande skiss av rörpostsystemet i Pia's hus.



Sams skiss av Pia's rörpostsystem



Pia's verkliga rörpostsystem

[1p]

Uppgift 7

- (a) Hitta största gemensamma delaren av 390 och 616 med Euklides algoritm. [0.5p]
 (b) Hitta heltal s och t så att

$$390s + 616t = \text{sgd}(390, 616).$$

[0.5p]

- (c) Hitta alla heltalslösningar till kongruensen

$$616x \equiv 4 \pmod{390}.$$

[0.5p]

- (d) Hitta alla heltalslösningar till kongruensen

$$616x \equiv 5 \pmod{390}.$$

[0.5p]

- (e) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{390}$ till ekvationen

$$[616] \odot [x] = [8].$$

[1p]

Uppgift 8

- (a) (i) Beskriv antingen *Kruskal's Algorithm* eller *Prim's Algorithm* för att hitta ett minsta uppspännande träd i en viktad graf.
- (ii) Använd din beskrivning ur (i) för att med din valda algoritm hitta ett minsta uppspännande träd i den viktade grafen nedan.
- (iii) Ange vikten på det minsta uppspännande träd som du har hittat. [1.5p]
- (b) (i) Beskriv *Dijkstra's Algorithm* för att hitta en kortaste stig från hörn x till ett hörn y i en viktad graf.
- (ii) Använd din beskrivning för att hitta en kortaste stig från hörn x till varje annat hörn i grafen nedan. [1.5p]

