

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2007

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 23 mars 2007

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

- (a) Uttryck talet

$$t = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$$

- (i) som ett binärt tal;
- (ii) som ett hexadecimalt tal;
- (iii) i basen 3.

[1.5p]

- (b) (i) Ange summan

$$S = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + \dots + 1001$$

m.h.a. summatecken.

- (ii) Beräkna summan S .

[1.5p]

Uppgift 2

Låt $M = \overline{X \cup Y}$ där $X = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \geq 10\}$ och $Y = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \equiv 1 \pmod{2}\}$.

- (a) Ange mängden M

- (i) med hjälp av inklusionsregler;
- (ii) genom att lista elementen.

[1.5p]

- (b) Låt $f : M \rightarrow \mathbb{Z}$ vara en funktion given av att $f(m) = 2m^2$. Ange funktionen genom att göra en värdetabell. Avgör med hjälp av tabellen om funktionen f är injektiv och/eller surjektiv.

[1.5p]

Uppgift 3

- (a) Låt $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1000\}$,
låt $A = \{n \in \mathcal{U} : 3|n\}$ och $B = \{n \in \mathcal{U} : n \text{ är jämnt}\}$.

- (i) Beräkna $|A|$, $|B|$ och $|A \cap B|$.

- (ii) Bestäm antalet udda positiva heltal mindre än 1000 som har 3 som delare. [2p]

- (b) En kortlek består av 52 kort med fyra färger och tretton valörer i varje färg. Ett *par* består av två kort med samma valör. Hur många par finns det i en kortlek?

[1p]

Uppgift 4

(a) Hitta största gemensamma delaren av 728 och 259 med Euklides algoritm. [0.75p]

(b) Hitta heltal s och t så att

$$728s + 259t = \text{sgd}(728, 259).$$

[0.75p]

(c) Hitta alla heltalslösningar till följande kongruenser:

(i) $259x \equiv 7 \pmod{728};$

(ii) $728x \equiv 7 \pmod{259};$

(iii) $259x \equiv 1 \pmod{728}.$

[1p]

(d) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{728}$ till ekvationen

$$[259] \odot [x] = [21].$$

[0.5p]

Uppgift 5

Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ definieras genom

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \text{för } n \geq 0,$$

och begynnelsevillkoret $a_0 = 0$.

(a) Använd rekursionsformeln för att beräkna a_1, a_2, a_3, a_4 och a_5 .
Visa dina uträkningar.

[1p]

(b) Bevisa med induktion att

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

för alla $n \geq 0$.

[2p]

Uppgift 6

(a) Låt a , b och c vara heltal. Bevisa att

(i) $2|(a + a)$;

(ii) om $2|(a + b)$ så gäller att $2|(b + a)$ också;

(iii) om $2|(a + b)$ och $2|(b + c)$ så gäller att $2|(a + c)$. [1.5p]

(b) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är en ekvivalensrelation. [0.5p]

(c) Låt R vara en relation på $\mathbb{Z}$ definierad av

$$(x, y) \in R \text{ om } 2|(x + y).$$

Bevisa att relationen R är en ekvivalensrelation och ange ekvivalensklasserna för R . [1p]

Uppgift 7

Låt G vara en graf med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Rita G . [0.5p]

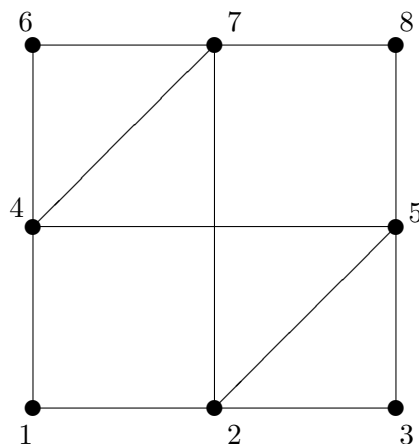
(b) Definiera vad som menas med att en graf är ett *träd*. [0.5p]

(c) När är två enkla grafer H_1 och H_2 isomorfa? [0.5p]

(d) Hitta tre icke-isomorfa uppspännande träd i G .
Motivera varför de inte är isomorfa. [1.5p]

Uppgift 8

- (a) (i) Ange gradföljden för följande graf G :



- (ii) Förklara varför summan av alla tal i gradföljden för G är två gånger antalet av kanter i G .
- (iii) Hitta en Eulercykel i G . [1.25p]
- (b) Definiera vad som menas med att en graf är *sammanhängande*. [0.25p]
- (c) Låt H vara en Hamiltonsk graf, låt e vara en villkorlig kant i H och låt H_e vara grafen H där vi taget bort kanten e .
- (i) Förklara varför H och H_e är sammanhängande.
- (ii) Bevisa att grafen nedan *inte* är Hamiltonsk. [1.5p]

