MID SWEDEN UNIVERSITY

TFM

Examination 2007

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (English)

Time: 5 hours

Date: 20 August 2007

There are EIGHT questions on this paper and each question carries three points. The maximum number of points available is 24. The points for each part of a question are indicated at the end of the part in [ ]-brackets. Ten points are needed for the mark G and eighteen points are required for the mark VG.

The candidates are advised that they must always show their working, otherwise they will not be awarded full marks for their answers.

The candidates are further advised to start each of the eight questions on a new *page and to clearly label all their answers.*

This is a closed book examination. No books, notes or mobile telephones are allowed in the examination room. Note that a collection of formulas is attached to the paper.

Electronic calculators may be used provided they cannot handle formulas. The make and model used must be specified on the cover of your script.

GOOD LUCK!!

Make sure that you are doing the right Discrete Mathematics A paper! This paper is for the course which used

[Johnsonbaugh]

as coursebook.

Question 1

(a) Express the number

$$t = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14}$$

(i) in binary;

(ii) in hexadecimal;

(iii) in base 5. [1.5p]

(b) (i) Write the sum

$$S = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + \ldots + 2001$$

using Σ-notation.

(ii) Calculate the sum S. [1.5p]

Question 2

Let $M = \overline{X \cup Y}$ where
$X = \{x \in \mathbb{Z}^+ \ : \ x \geq 12\}$ and $Y = \{n \in \mathbb{Z}^+ \ : \ n \equiv 1 \pmod 2\}$.

(a) Express the set M

(i) by the rules of inclusion method;

(ii) by the listing method. [1.5p]

(b) Let $f : M \to \mathbb{Z}$ be the function given by the rule $f(m) = -m^2$. Make a table to show the function f and use the table to decide whether f is one-to-one and/or onto. [1.5p]

Question 3

(a) Let $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 1000\}$,
let $A = \{n \in \mathcal{U} \ : \ 7|n\}$ and $B = \{n \in \mathcal{U} \ : \ n \text{ is even }\}$.

(i) Calculate $|A|$, $|B|$ and $|A \cap B|$.

(ii) Find the number of odd, positive integers less than 1000 divisible by 7. [2p]

(b) Consider the set of all 7-digit strings which can be formed by using the digits 1, 2 and 3. How many of them have precisely three 3s? [1p]

Question 4

(a) Use Euclid's algorithm to find the greatest common divisor of 728 and 259. [0.75p]

(b) Find integers s and t such that

$$728s + 259t = \gcd(728, 259).$$

[0.75p]

(c) Find all integer solutions to the following congruences.

(i) $259x \equiv 7 \pmod{728}$;

(ii) $728x \equiv 7 \pmod{259}$;

(iii) $259x \equiv 1 \pmod{728}$. [1p]

(d) Find all solutions $[x] \in \mathbb{Z}_{728}$ of the equation

$$[259] \odot [x] = [14].$$

[0.5p]

Question 5

Consider the sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ defined by the recurrence relation

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \text{for } n \geq 0,$$

and the initial term $a_0 = 0$.

(a) Showing all your working, use the recurrence relation to compute a_1, a_2, a_3, a_4 and a_5. [1p]

(b) Prove by induction that

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

for all $n \geq 0$. [2p]

Question 6

(a) Let a, b and c be integers. Prove that

(i) $2|(a+a)$;

(ii) if $2|(a+b)$ then $2|(b+a)$ also;

(iii) if $2|(a+b)$ and $2|(b+c)$ then $2|(a+c)$. [1.5p]

(b) Explain what it means for a relation R on a set S to be an *equivalence relation*. [0.5p]

(c) Let R be a relation on $\mathbb{Z}$ given by

$$(x, y) \in R \text{ iff } 2|(x+y).$$

Prove that R is an equivalence relation and list the equivalence classes of R. [1p]

Question 7

Let G be a graph with vertex set $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ and adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Draw a picture of G. [0.5p]

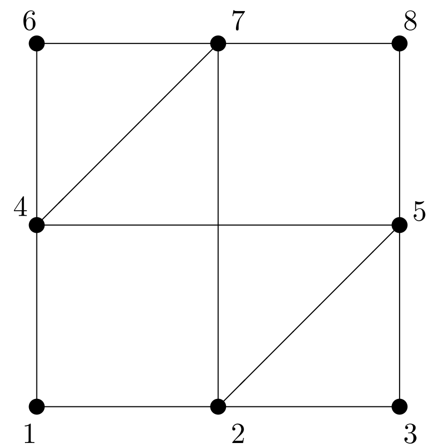
(b) Define what it means for a graph to be a *tree*. [0.5p]

(c) What does it mean for two simple graphs H_1 and H_2 to be isomorphic? [0.5p]

(d) Find three non-isomorphic spanning trees in the graph G. Justify why your trees are non-isomorphic. [1.5p]

Question 8

(a) (i) List the degree sequence of the following graph G.



(ii) Explain why the sum of all the entries in the degree sequence of G is twice the number of edges in G.

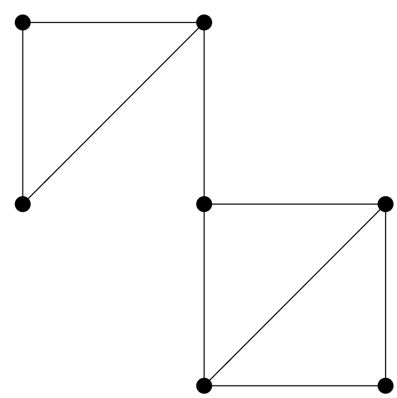
(iii) Find an Euler cycle in G. [1.25p]

(b) Define what it means for a graph to be *connected*. [0.25p]

(c) Let H be a Hamiltonian graph, let e be any edge in H and H_e be the graph H with the edge e deleted.

(i) Explain why both H and H_e are connected.

(ii) Hence prove that the graph below cannot be Hamiltonian. [1.5p]



MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2007

MAAA99 Algebra och Diskret Matematik A (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 20 augusti 2007

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1

(a) Uttryck talet
$$t = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14}$$

(i) som ett binärt tal;

(ii) som ett hexadecimalt tal;

(iii) i basen 5. [1.5p]

(b) (i) Ange summan
$$S = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + \ldots + 2001$$
m.h.a. summatecken.

(ii) Beräkna summan S. [1.5p]

Uppgift 2

Låt $M = \overline{X \cup Y}$ där $X = \{x \in \mathbb{Z}^+ \; : \; x \geq 12\}$ och $Y = \{n \in \mathbb{Z}^+ \; : \; n \equiv 1 \pmod 2\}$.

(a) Ange mängden M

(i) med hjälp av inklusionsregler;

(ii) genom att lista elementen. [1.5p]

(b) Låt $f : M \to \mathbb{Z}$ vara en funktion given av att $f(m) = -m^2$. Ange funktionen genom att göra en värdetabell. Avgör med hjälp av tabellen om funktionen f är injektiv och/eller surjektiv. [1.5p]

Uppgift 3

(a) Låt $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 1000\}$,
låt $A = \{n \in \mathcal{U} \; : \; 7|n\}$ och $B = \{n \in \mathcal{U} \; : \; n \text{ är jämnt}\}$.

(i) Beräkna $|A|$, $|B|$ och $|A \cap B|$.

(ii) Bestäm antalet udda positiva heltal mindre än 1000 som har 7 som delare. [2p]

(b) Hur många sjusiffriga positiva heltal där alla siffror är 1, 2 eller 3 finns det som innehåller exact tre treor? [1p]

Uppgift 4

(a) Hitta största gemensamma delaren av 728 och 259 med Euklides algoritm. [0.75p]

(b) Hitta heltal s och t så att

$$728s + 259t = \mathrm{sgd}(728, 259).$$

[0.75p]

(c) Hitta alla heltalslösningar till följande kongruenser:

(i) $259x \equiv 7 (\bmod 728)$;

(ii) $728x \equiv 7 (\bmod 259)$;

(iii) $259x \equiv 1 (\bmod 728)$. [1p]

(d) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{728}$ till ekvationen

$$[259] \odot [x] = [14].$$

[0.5p]

Uppgift 5

Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras genom

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \text{för } n \geq 0,$$

och begynnelsevillkoret $a_0 = 0$.

(a) Använd rekursionsformeln för att beräkna a_1, a_2, a_3, a_4 och a_5.
Visa dina uträkningar. [1p]

(b) Bevisa med induktion att

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

för alla $n \geq 0$. [2p]

Uppgift 6

(a) Låt a, b och c vara heltal. Bevisa att

(i) $2|(a+a)$;

(ii) om $2|(a+b)$ så gäller att $2|(b+a)$ också;

(iii) om $2|(a+b)$ och $2|(b+c)$ så gäller att $2|(a+c)$. [1.5p]

(b) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är en ekvivalensrelation. [0.5p]

(c) Låt R vara en relation på $\mathbb{Z}$ definierad av

$$(x, y) \in R \text{ omm } 2|(x+y).$$

Bevisa att relationen R är en ekvivalensrelation och ange ekvivalensklasserna för R. [1p]

Uppgift 7

Låt G vara en graf med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Rita G. [0.5p]

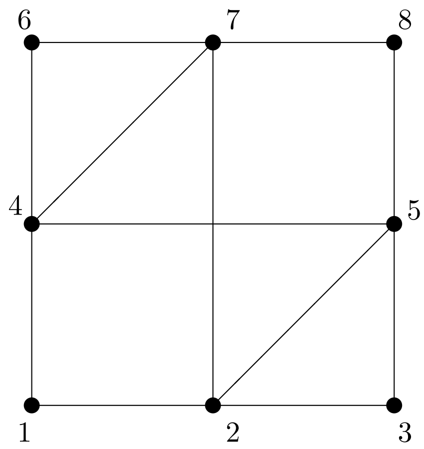
(b) Definiera vad som menas med att en graf är ett *träd*. [0.5p]

(c) När är två enkla grafer H_1 och H_2 isomorfa? [0.5p]

(d) Hitta tre icke-isomorfa uppspännande träd i G. Motivera varför de inte är isomorfa. [1.5p]

Uppgift 8

(a) (i) Ange gradföljden för följande graf G:



(ii) Förklara varför summan av alla tal i gradföljden för G är två gånger antalet av kanter i G.

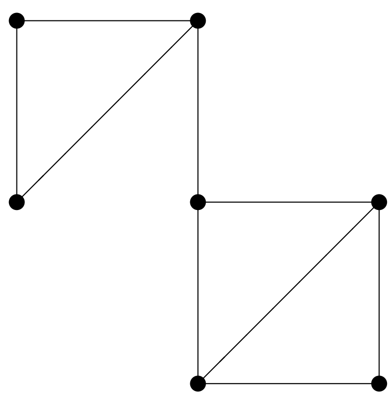
(iii) Hitta en Eulercykel i G. [1.25p]

(b) Definiera vad som menas med att en graf är *sammanhängande*. [0.25p]

(c) Låt H vara en Hamiltonsk graf, låt e vara en villkorlig kant i H och låt H_e vara grafen H där vi taget bort kanten e.

(i) Förklara varför H och H_e är sammanhängande.

(ii) Bevisa att grafen nedan *inte* är Hamiltonsk. [1.5p]



MAAA99

Algebra och diskret matematik
Formler och symboler

Symboler för relationer mellan tal

$a = b$	a är lika med b
$a \neq b$	a är inte lika med b
$a < b$	a är strikt mindre än b
$a > b$	a är strikt större än b
$a \leq b$	a är mindre än eller lika med b
$a \geq b$	a är större än eller lika med b
$a \mid b$	heltalet a delar heltalet b

Några räknelagar för heltal

Associativa lagar:	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$
Kommutativa lagar:	$a+b = b+a$	$ab = ba$
Distributiva lagen:	$a(b+c) = ab+ac$	
Lagen om nolldelare:	Om $ab = 0$ så är $a = 0$ eller $b = 0$	

Några talmängder

$\emptyset$	den tomma mängden $\{\ \}$
$\mathbb{Z}$	mängden av heltal $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_+$	mängden av positiva heltal $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_-$	mängden av negativa heltal $\{\ldots -3, -2, -1\}$
$\mathbb{N}$	mängden av de naturliga talen $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\{x \in \mathbb{Z} \mid P\}$	mängden av alla x i $\mathbb{Z}$ som uppfyller egenskap P
$\{x \in \mathbb{Z} : P\}$	är detsamma som $\{x \in \mathbb{Z} \mid P\}$
$\mathbb{Q}$	mängden av de rationella talen $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$
$\mathbb{Q}_+$	mängden av de positiva rationella talen $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$
$\mathbb{Q}_-$	mängden av de negativa rationella talen $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$
$\mathbb{R}$	mängden av de reella talen
$\mathbb{R}_+$	mängden av de positiva reella talen $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{R}_-$	mängden av de negativa reella talen $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$
$[a, b]$	det slutna intervallet från a till b, dvs. $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$]a, b[$	det öppna intervallet från a till b, dvs. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Symboler ang. mängder

$A = B$	A är lika med B
$A \neq B$	A är inte lika med B
$a \in A$	elementet a tillhör mängden A
$a \notin A$	elementet a tillhör inte mängden A
$A \cup B$	unionen av A och B, dvs. $\{x :\ x \in A$ eller $x \in B\}$
$A \cap B$	snittet av A och B, dvs. $\{x :\ x \in A$ och $x \in B\}$
$A - B$	mängddifferensen av A och B, dvs. $\{x \in A :\ x \notin B\}$
$\overline{B}$	komplementmängden till B, dvs. om B är en delmängd av grundmängden $\mathcal{U}$ så är $\overline{B} = \{x \in \mathcal{U} :\ x \notin B\}$
$A \subseteq B$	A är en delmängd av B, dvs. $x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \subset B$	A är en äkta delmängd av B, dvs. $A \subseteq B$ och $A \neq B$
$A \times B$	den cartesiska produkten av A och B, dvs. mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$
$\mathcal{P}(A)$	potensmängden till A, dvs. mängden av alla delmängder av A

Några räknelagar för mängder

Associativa lagar:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativa lagar:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva lagar:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgans lagar:	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Symboler ang. logik

$\neg p$	icke p
$p \vee q$	p eller q
$p \wedge q$	p och q
$p \Rightarrow q$	p medför q
$p \Leftrightarrow q$	p är ekvivalent med q

Några lagar för logik

Associativa lagar:	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Kommutativa lagar:	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Distributiva lagar:	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
De Morgans lagar:	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Några logiska ekvivalenser för bevisföring

Att bevisa $p \Leftrightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa att $p \Rightarrow q$ och $q \Rightarrow p$

Att bevisa $p \Rightarrow q$ är ekvivalent med att bevisa $\neg q \Rightarrow \neg p$

Lösning av andragradsekvationer

Andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ där $a \neq 0$ har rötterna $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Några standardsummor

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{r=0}^{n} x^r = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ där det reella talet } x \neq 1$$

De positiva primtalen ≤ 100

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$