MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2007

MA014G   Algebra och Diskret Matematik (svenska)

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 2 november 2007

Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. Maximalt poängantal är 24. Därutöver innehållar skrivningen en frivillig uppgift.

Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Johnsonbaugh]

som kursbok.

Uppgift 1 (obligatorisk)

(a) Uttryck talet $t = 3^1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + 3^9 + 3^{11}$

(i) i basen 3;

(ii) som ett binärt tal;

(iii) som ett hexadecimalt tal. [1p]

(b) Ange summan

$$s = 2 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^7 + \ldots + 1000 \cdot 3^{999}$$

m.h.a. summatecken. [1p]

(c) Beräkna summan

$$\sum_{n=7}^{207} (5n - 2).$$

Visa dina uträkningar! [1p]

Uppgift 2 (obligatorisk)

(a) Skriv ner följande påståenden utan att använda orden ’ej’, ’icke’ eller ’inte’.

(i) Negationen av

För alla heltal x gäller att x är ett primtal.

(ii) Det kontrapositiva påståendet till

Om $x \in \mathbb{Z}$ och $x > 1$ så är $x \geq 2$.

[1p]

(b) Låt $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ vara funktionen

$$f(x) = 2^x + (-2)^x,$$

och låt R vara värdemängden till f.

(i) Ange mängden R genom att lista elementen.

(ii) Ange mängden $R - \{0\}$ med hjälp av inklusionsregler.

(iii) Är f *surjektiv*?

(iv) Är f *injektiv*?

(v) Är f inverterbar? Motivera dina svar! [2p]

Uppgift 3 (obligatorisk)

(a) (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod 3$.

(ii) Bevisa för alla heltal a, b, x och y att
om $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 3)$ och $x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, 3)$ så är $a + x \equiv b + y \,(\mathrm{mod}\, 3)$. [1p]

(b) Låt mängden $S = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ och låt R vara en relation på S definierad av

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \quad \text{omm} \quad x_1 - x_2 \equiv y_1 - y_2 \,(\mathrm{mod}\, 3).$$

(i) Ange mängden S genom att lista elementen.

(ii) Rita relationsdigrafen för R.

(iii) Visa m.h.a. (a)(ii) att relationen R är transitiv.

(iv) Visa att relationen R är en ekvivalensrelation.

(v) Ange ekvivalensklasserna för R på S. [2p]

Uppgift 4 (obligatorisk)

En talföljd $\{u_n\}$ definieras genom rekursionsformeln

$$u_{n+1} = 3u_n + 3^{n+2} \quad \text{för} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

och begynnelsevillkoret $u_0 = 0$.

(a) Använd rekursionsformeln för att beräkna u_1, u_2, u_3, u_4 och u_5.
Visa dina uträkningar. [1p]

(b) Bevisa med induktion att

$$u_n = n3^{n+1} \quad \text{för alla} \quad n \geq 0.$$

[2p]

Uppgift 5 (obligatorisk)

(a) En ordnad följd med fyra siffror konstrueras genom att välja siffror utan repetition ur mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Bestäm

(i) det totala antalet av sådana följder;

(ii) antalet följder som börjar med en udda siffra;

(iii) antalet följder som slutar på en udda siffra;

(iv) antalet följder som börjar och slutar med en udda siffra;

(v) antalet följder som börjar med en udda siffra eller slutar med en udda siffra eller både och;

(vi) antalet följder som börjar med en udda siffra eller slutar med en udda siffra men inte både och. [1,5p]

(b) (i) Hur många olika sexsiffriga heltal kan bildas genom att arrangera om siffrorna 123456?

(ii) Hur många olika sexsiffriga heltal som innehåller minst en av delsträngarna 654, 543 eller 21 kan bildas genom att arrangera om siffrorna 123456? [1,5p]

Uppgift 6 (obligatorisk)

(a) Vad är en *stig* av längd ℓ i en (enkel) graf G? [0,25p]

(b) (i) Rita den fullständiga grafen K_6.

(ii) Bestäm antalet kanter i K_6.

(iii) Låt v och w vara två hörn i K_6. Bestäm antalet stigar från v till w av längd 2.

(iv) Låt x och y vara två hörn i K_n där $n \geq 2$. Bestäm antalet stigar från x till y av längd 2. Motivera ditt svar! [1,5p]

(c) Rita två icke-isomorfa sammanhängande enkla grafer, där graden av hörnen i båda graferna ges av följden $3, 3, 2, 1, 1, 1, 1$. Motivera varför de två graferna du givit inte är isomorfa. [0,75p]

(d) Motivera om det är möjligt att konstruera ett träd där hörnen har graderna $4, 3, 3, 2, 1, 1$. [0,5p]

Uppgift 7 (obligatorisk)

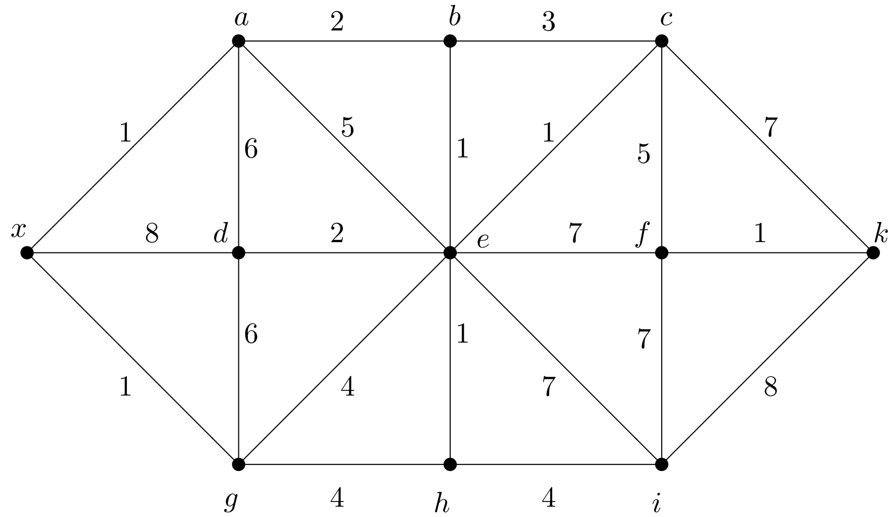
(a) (i) Beskriv antingen *Kruskals Algoritm* eller *Prims Algoritm* för att hitta ett minsta uppspännande träd i en viktad graf.

(ii) Använd din beskrivning ur (i) för att med din valda algoritm hitta ett minsta uppspännande träd i den viktade grafen nedan.

(iii) Ange vikten på det minsta uppspännande träd som du har hittat. [1.5p]

(b) (i) Beskriv *Dijkstras Algoritm* för att hitta en kortaste stig från hörn x till hörn y i en viktad graf.

(ii) Använd din beskrivning för att hitta en kortaste stig från hörn x till varje annat hörn i grafen nedan. [1.5p]



Uppgift 8 (obligatorisk)

(a) Använd *Euklides algoritm* för att visa att det finns heltal s och t sådana att

$$2007s + 1857t = 3.$$

[1,5p]

(b) Bestäm alla lösningar $[x] \in \mathbb{Z}_{2007}$ till ekvationen

$$[1857] \odot [x] = [6].$$

Visa dina uträkningar. [0,5p]

(c) Bestäm alla heltalslösningar x till kongruensen

$$1857x \equiv 6 \pmod{2007}.$$

Visa dina uträkningar. [0,5p]

(d) Bestäm alla heltalslösningar x till kongruensen

$$619x \equiv 5 \pmod{669}.$$

Visa dina uträkningar. [0,5p]

Uppgift 9 (FRIVILLIG)

Låt n vara ett positivt heltal.

(a) Beräkna summan

$$\sum_{r=1}^{n} 2^r \qquad \text{för } n \geq 1$$

med hjälp av formelbladet.

(b) Bevisa med induktion att

$$\sum_{r=1}^{n} 2^{2r-1} = \sum_{r=1}^{2n} 2^r - \sum_{r=1}^{n} 2^{2r} \qquad \text{för } n \geq 1.$$

(c) Använd identiteten i (b) för att härleda formeln

$$\sum_{r=1}^{n} 2^{2r-1} = \frac{2^{2n+1} - 2}{3} \qquad \text{för } n \geq 1.$$

MID SWEDEN UNIVERSITY

TFM

Examination 2007

MA014G Algebra and Discrete Mathematics (English)

Time: 5 hours

Date: 2 November 2007

The compulsory part of this examination consists of 8 questions, where each question can be awarded up to 3 points. The maximum number of points available is 24. The points for each part of a question are indicated at the end of the part in [ ]-brackets. In addition to the compulsory part, the exam contains an optional question.

The maximum grade available for the compulsory part alone is a B. The grade A may be awarded if a candidate has reached a grade B on the compulsory part and provided a good solution to the optional question. Solution of the optional question may also raise a grade C, D or E obtained on the compulsory part by one grade.

The candidates are advised that they must always show their working, otherwise they will not be awarded full marks for their answers.

The candidates are further advised to start each of the nine questions on a new page and to clearly label all their answers.

This is a closed book examination. No books, notes or mobile telephones are allowed in the examination room. Note that a collection of formulas is attached to the paper. Electronic calculators may be used provided they cannot handle formulas. The make and model used must be specified on the cover of your script.

GOOD LUCK!!

Make sure that you are doing the right Discrete Mathematics paper! This paper is for the course which used

[Johnsonbaugh]

as coursebook.

Question 1 (compulsory)

(a) Express the number $t = 3^1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + 3^9 + 3^{11}$

(i) in base 3;

(ii) in binary;

(iii) in hexadecimal. [1p]

(b) Use Σ-notation to express the sum

$$s = 2 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^7 + \ldots + 1000 \cdot 3^{999}.$$

[1p]

(c) Showing all your working, compute the sum

$$\sum_{n=7}^{207} (5n - 2).$$

[1p]

Question 2 (compulsory)

(a) Write down each of the following propositions without using the word 'not'.

(i) The negation of

For all integers x, x is a prime.

(ii) The contrapositive statement of

If $x \in \mathbb{Z}$ and $x > 1$ then $x \geq 2$.

[1p]

(b) Let $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ be a function given by the rule

$$f(x) = 2^x + (-2)^x,$$

and let R be the *range* of f.

(i) Give the set R by the listing method.

(ii) Give the set $R - \{0\}$ by rules of inclusion.

(iii) Is f *onto*?

(iv) Is f *one-to-one*?

(v) Is f invertible? Justify your answers! [2p]

Question 3 (compulsory)

(a) (i) What does it mean to say that $a \equiv b \pmod 3$?

(ii) For all integers a, b, x and y, show that if $a \equiv b \pmod 3$ and $x \equiv y \pmod 3$ then $a + x \equiv b + y \pmod 3$. [1p]

(b) Let $S = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ and let R be a relation on S given by

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \;\text{ iff }\; x_1 - x_2 \equiv y_1 - y_2 \pmod 3.$$

(i) Give the set S by listing its elements.

(ii) Draw the relation digraph for R.

(iii) Use (a)(ii) to show that the relation R is transitive.

(iv) Show that the relation R is an equivalence relation.

(v) Give the equivalence classes for R on S. [2p]

Question 4 (compulsory)

A sequence $\{u_n\}$ is given by the recurrence relation

$$u_{n+1} = 3u_n + 3^{n+2} \;\text{ for }\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

and the initial term $u_0 = 0$.

(a) Showing all your working, use the recurrence relation to compute u_1, u_2, u_3, u_4 and u_5. [1p]

(b) Use induction to prove that

$$u_n = n3^{n+1} \;\text{ for all }\; n \geq 0.$$

[2p]

Question 5 (compulsory)

(a) Consider the set of ordered sequences consisting of four digits chosen without repetition from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Compute

(i) the total number of such sequences;

(ii) the number of such sequences starting with an odd digit;

(iii) the number of such sequences ending with an odd digit;

(iv) the number of such sequences starting and ending with an odd digit;

(v) the number of such sequences starting or ending with an odd digit or both;

(vi) the number of such sequences starting or ending with an odd digit, but not both.

[1,5p]

(b) (i) How many different 6-digit integers can be formed by rearranging the digits 123456?

(ii) How many different 6-digit integers containing at least one of the substrings 654, 543 or 21 can be formed by rearranging the digits 123456?

[1,5p]

Question 6 (compulsory)

(a) What is a *path* of length ℓ in a (simple) graph G? [0,25p]

(b) (i) Draw the complete graph K_6.

(ii) Find the number of edges in K_6.

(iii) Let v and w be two vertices in K_6. Compute the number of paths of length 2 from v to w.

(iv) Let x and y be two vertices in K_n where $n \geq 2$. Justifying your answer, find the number of paths of length 2 from x to y.

[1,5p]

(c) Draw two non-isomorphic connected simple graphs with degree sequence $3, 3, 2, 1, 1, 1, 1$. Explain why the two graphs you have constructed are not isomorphic.

[0,75p]

(d) Decide whether it is possible to construct a tree with degree sequence $4, 3, 3, 2, 1, 1$. [0,5p]

Question 7 (compulsory)

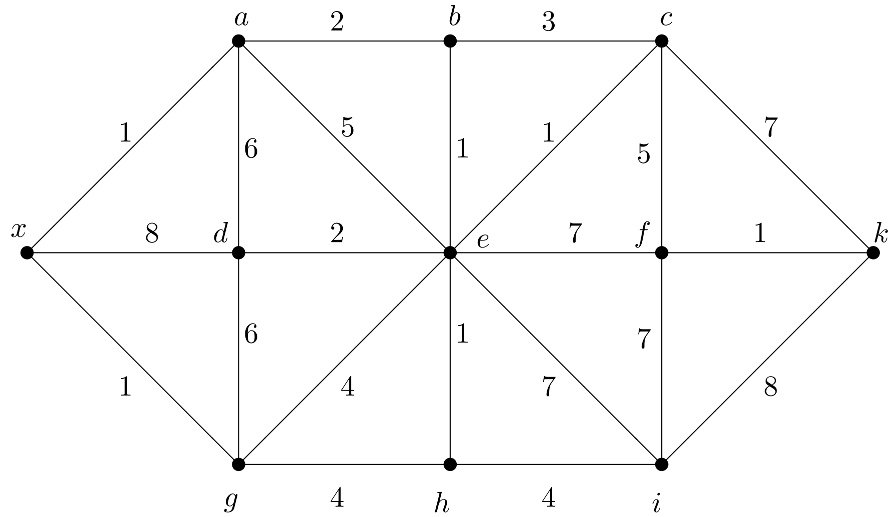
(a) (i) Describe either *Kruskal's Algorithm* or *Prim's Algorithm* for finding a minimum spanning tree in a weighted graph.

(ii) Illustrate your description in (i) by using your chosen algorithm to find a minimum spanning tree in the weighted graph below.

(iii) Give the weight of the minimum spanning tree found. [1.5p]

(b) (i) Describe *Dijkstra's Algorithm* for finding the shortest path from a vertex x to a vertex y in a weighted graph.

(ii) Illustrate your description of the algorithm by using it to find the shortest path from the vertex x to every other vertex in the graph below. [1.5p]



Question 8 (compulsory)

(a) Use *Euclid's Algorithm* to show that there are integers s and t such that

$$2007s + 1857t = 3.$$

[1,5p]

(b) Showing your working, find all solutions $[x] \in \mathbb{Z}_{2007}$ of the equation

$$[1857] \odot [x] = [6].$$

[0,5p]

(c) Showing your working, find all integer solutions x of the congruence

$$1857x \equiv 6 \pmod{2007}.$$

[0,5p]

(d) Showing your working, find all integer solutions x of the congruence

$$619x \equiv 5 \pmod{669}.$$

[0,5p]

Question 9 (OPTIONAL)

Let n denote a positive integer.

(a) Use the formula collection to compute the sum

$$\sum_{r=1}^{n} 2^r \qquad \text{for } n \geq 1.$$

(b) Use induction to prove that

$$\sum_{r=1}^{n} 2^{2r-1} = \sum_{r=1}^{2n} 2^r - \sum_{r=1}^{n} 2^{2r} \qquad \text{for } n \geq 1.$$

(c) Use the identity from (b) to deduce that

$$\sum_{r=1}^{n} 2^{2r-1} = \frac{2^{2n+1} - 2}{3} \qquad \text{for } n \geq 1.$$