

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2006

MAAA26

Diskret Matematik för Yrkeshögskoleutbildning

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 5 juni 2006

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Eriksson & Gavel]

som kursbok.

Uppgift 1

- (a) Låt A, B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.
- (i) Rita ett Venndiagram som visar att mängderna A, B och C delar upp $\mathcal{U}$ i 8 disjunkta områden.
 - (ii) Markera området $X = A \cap (B^c \cup C)$ i ditt Venndiagram.
 - (iii) Sätt $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, c, e, f, h\}$, $B = \{a, d, g, h\}$ och $C = \{a, b, c, d\}$. Bestäm mängden X . [1.5p]
- (b) Ange följande mängder genom att lista elementen.
- (i) $\{7r + 2 : r \in \mathbb{Z} \text{ och } -2 \leq r \leq 3\}$;
 - (ii) $\{5^s : s \in \mathbb{Z} \text{ och } -2 \leq s \leq 3\}$. [1p]
- (c) Ange mängden
- $$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right\}$$
- med hjälp av mängdbyggaren. [0.5p]

Uppgift 2

- (a) Uttryck det binära talet $(1011100011001010)_2$
- (i) i basen 10;
 - (ii) som ett hexadecimalt tal. [1p]
- (b) Lös andragradsekvationen $5x^2 + 2x - 3 = 0$. Visa dina uträkningar. [1p]
- (c) Förenkla uttrycket
- $$\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$$
- så långt som möjligt. Visa dina uträkningar. [1p]

Uppgift 3

(a) Ange följande formel m.h.a. summatecken:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[1p]

(b) Beräkna följande summa m.h.a. formeln i (a):

$$\sum_{n=1}^{200} (2n-1)(2n+1).$$

[1p]

(c) Den rekursiva talföljden $\{a_n\}_1^\infty$ definieras genom

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= 2a_n + n \quad \text{för } n \geq 1. \end{cases}$$

Beräkna a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 och a_7 . Visa dina uträkningar.

[1p]

Uppgift 4

(a) Ange en sanningstabell för $p \Rightarrow q$. [0.5p]

(b) Låt p och q vara följande två påståenden om positiva heltal n .

$$p : n < 10 \qquad q : \text{sgd}(n, 10) < 10.$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska. Ge ett motexempel om ett påstående är falskt.

(i) $p \Rightarrow q$;

(ii) $q \Rightarrow p$. [1p]

(c) Ange om följande påståenden är sanna eller falska.

(i) För alla positiva heltal a, b och n gäller att om $n|ab$ så $n|a$ eller $n|b$;

(ii) För alla mängder A och B gäller att om $C = A \cup B$ så är $|C| = |A| + |B|$;

(iii) För alla mängder A och B gäller att
om $|A| = 10$ och $|B| = 3$ så är $|A \times B| = 30$;

(iv) För alla mängder A gäller att $\emptyset \subset A$;

(v) För alla mängder A gäller att $\emptyset \subseteq A$;

(vi) Det finns en mängd A så att $\emptyset \in A$. [1.5p]

Uppgift 5

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

- (i) reflexiv;
- (ii) symmetrisk;
- (iii) transitiv;
- (iv) antisymmetrisk.

[0.5p]

(b) Låt R vara följande relation på mängden $S = \{w, x, y, z\}$.

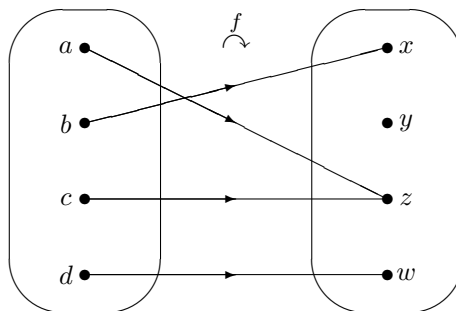
$$R = \{(w, w), (w, y), (x, w), (x, x), (y, w), (y, z), (z, w)\}$$

- (i) Rita relationsgraf för R .
- (ii) Relationen R är inte symmetrisk. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli symmetrisk.
- (iii) Relationen R är inte reflexiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli reflexiv.
- (iv) Relationen R är inte transitiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli transitiv.
- (v) Är relationen R antisymmetrisk? Motivera ditt svar!

[2.5p]

Uppgift 6

- (a) En funktion f representeras av diagrammet nedan.



- (i) Ange *definitionsområdet*, *målmängden* och *värdeområdet* till f .
(ii) Förklara varför f inte är vare sig *injektiv* eller *surjektiv*. Ge ett specifikt motexempel i varje fall. [2]
- (b) Låt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen

$$g(x) = 5x - 3.$$

- (i) Förklara varför g är inverterbar.
(ii) Bestäm g :s invers. [1]

Uppgift 7

Låt G vara grafen med hörnmängd $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och grannmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och låt H vara grafen med hörnmängd $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ och kantmängd

$$E(H) = \{ab, ac, bc, cd, ce\}.$$

- (a) Rita G och H .
- (b) Definiera vad som menas med att en graf är *bipartit*.
- (c) Är G bipartit? Motivera ditt svar.
- (d) Definiera vad som menas med att två grafer är *isomorfa*.
- (e) Är G och H isomorfa? Motivera ditt svar. [3]

Uppgift 8

- (a)
 - (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod{7}$.
 - (ii) Ange de 7 kongruensklasserna för kongruensrelationen $a \equiv b \pmod{7}$ på $\mathbb{Z}$.
 - (iii) Ange multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_7$. [1.5p]
- (b) Använd Euklides algoritm för att visa att det finns heltal s och t sådana att
$$8s + 13t = 2.$$
[1p]
- (c) Bestäm alla heltalslösningar x till kongruensen
$$8x \equiv 2 \pmod{13}.$$
Visa dina uträkningar. [0.5p]