MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2007

MAAA26
Diskret Matematik för Yrkeshögskoleutbildning

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 9 januari 2007

Denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Maximalt poängantal är 24. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom [ ]-parenteser. För betyg G krävs det 10 poäng och för betyg VG krävs 18 poäng.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Eriksson & Gavel]

som kursbok.

Uppgift 1

(a) Låt A,B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.

(i) Rita ett Venndiagram som visar att mängderna A, B och C delar upp $\mathcal{U}$ i 8 disjunkta områden.

(ii) Markera mängden

$$X = (A \cap (B \cup C)^c) \cup ((B \cap C) \cap A^c)$$

i ditt Venndiagram. [1p]

(b) Ange mängden

$$Y = \{d \in \mathbb{Z}_+ : \ d \mid 36\}$$

genom att lista elementen. [1p]

(c) Låt $f : Y \to \mathbb{Z}_+$ vara funktionen

$$f(x) = x^2.$$

(i) Bevisa att f är injektiv.

(ii) Är f surjektiv? Motivera! [1p]

Uppgift 2

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

(i) en ekvivalensrelation;

(ii) en partialordning.

[1p]

(b) Definiera relationen R på mängden $S = \{4, 3, 2, 1, 0\}$ genom att

$$(x_1, x_2) \in R \text{ omm } x_1 \leq x_2.$$

(i) Rita relationsgrafen för R.

(ii) Bevisa att relationen R *inte* är en ekvivalensrelation.

(iii) Är relationen R en partialordning? Motivera! [2p]

Uppgift 3

(a) Uttryck det decimala talet $(1273)_{10}$

(i) som ett binärt tal;

(ii) som ett hexadecimalt tal. [1p]

(b) Ange följande formel m.h.a. summatecken:

$$12345600 = 1 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2.$$

[1p]

(c) Den rekursiva talföljden $\{a_n\}_0^\infty$ definieras genom

$$\begin{cases} a_0 & = & -1 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & -6a_{n+1} - 9a_n \quad \text{för } n \geq 0. \end{cases}$$

Beräkna a_2, a_3, a_4, a_5 och a_6. Visa dina uträkningar. [1p]

Uppgift 4

(a) Beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2n-1}$$

Visa dina uträkningar. [1p]

(b) Lös andragradsekvationen $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Visa dina uträkningar. [1p]

(c) Förenkla uttrycket

$$\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

så långt som möjligt. Visa dina uträkningar. [1p]

Uppgift 5

Bestäm vilket/vilka alternativ som är korrekt/a i det följande. Ge en kort motivering för alla dina svar.

(a) Antalet 10-siffriga binära strängar som innehåller precis 3 nollor är

(i) $10 \cdot 9 \cdot 8$

(ii) $5!$

(iii) 120

(iv) $(10 \cdot 9 \cdot 8)/(3 \cdot 2 \cdot 1)$

(v) $2^7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ [1p]

(b) $\mathrm{sgd}(1000, 486)$ är

(i) 1

(ii) 2

(iii) större än 2 [1p]

(c) Låt n vara ett positivt heltal. Påståendet

'om $n^2 > 4$ så är $n > 2$'

är ekvivalent med påståendet

(i) 'om $2 < n$ så är $n^2 < 4$'

(ii) '$n^2 \leq 4$ om $n \leq 2$'

(iii) 'om $n > 2$ så är $n^2 > 4$' [1p]

Uppgift 6

(a) (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod{10}$.
(ii) Ange kongruensklassen $[3]_{10}$ m.h.a. mängdbyggaren.
(iii) Beräkna $[3]_{10} \odot [7]_{10}$ i $\mathbb{Z}_{10}$. [1p]

(b) Använd Euklides algoritm för att hitta heltal s och t sådana att

$$486s + 1000t = 2.$$

[1p]

(c) Bestäm alla heltalslösningar x till kongruensen

$$486x \equiv 2 \pmod{1000}.$$

Visa dina uträkningar. [0.5p]

(d) Bestäm alla heltalslösningar x till kongruensen

$$486x \equiv 1 \pmod{1000}.$$

Visa dina uträkningar. [0.5p]

Uppgift 7

Låt G vara grafen med hörnmängd $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och grannmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och låt H vara grafen med hörnmängd $V(H) = \{a, b, c, d, e, f\}$ och kantmängd

$$E(H) = \{ab, ac, ad, bc, ce, cf, de, df, ef\}.$$

(a) Rita G och H. [1p]

(b) Definiera vad som menas med att en funktion $\phi : V(G) \to V(H)$ är en *isomorfi* mellan G och H. [0.5p]

(c) Hitta en isomorfi mellan graferna G och H. [1.5p]

Uppgift 8

(a) Beskriv *Kruskals Algoritm* för att hitta ett minimalt spännande träd i en viktad graf. [1.5p]

(b) Använd Kruskals Algoritm för att hitta ett minimalt spännande träd i den viktade grafen nedan. [1p]

(c) Ange vikten på trädet som du har hittat i (b). [0.5p]