

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2008

MA053G

Diskret Matematik för Yrkehögskoleutbildning

Skrivtid: 5 timmar

Datum: 5 juni 2008

Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. Maximalt poängantal är 24. Därutöver innehåller skrivningen en frivillig uppgift.

Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Eriksson & Gavel]

som kursbok.

Uppgift 1 (obligatorisk)

(a) Låt A, B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.

(i) Rita ett Venndiagram som visar att mängderna A, B och C delar upp $\mathcal{U}$ i 8 disjunkta områden.

(ii) Markera området $X = B \cup (A^c \cap C)$ i ditt Venndiagram. [1p]

(b) Ange följande mängder genom att lista elementen.

(i) $\{3m - 2 : m \in \mathbb{Z} \text{ och } -2 \leq m \leq 3\}$;

(ii) $\{2n^3 : n \in \mathbb{Z} \text{ och } -2 \leq n \leq 3\}$. [1p]

(c) Ange mängden

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots\right\}$$

med hjälp av mängdbyggaren. [1p]

Uppgift 2 (obligatorisk)

(a) Uttryck det decimala talet

$$t = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^9 + 2^{11}$$

(i) som ett binärt tal;

(ii) som ett hexadecimalt tal. [1p]

(b) Lös andragradsekvationen

$$21x^2 + 17x + 2 = 0.$$

Visa dina uträkningar och ange rötternas *exakta* värden (m.h.a. bråk). [1p]

(c) Förenkla uttrycket

$$3 \cdot 3^{2x+y} / 9^{x-1}$$

så långt som möjligt. Visa dina uträkningar. [1p]

Uppgift 3 (obligatorisk)

- (a) Beräkna summan

$$\sum_{n=5}^8 \frac{1}{n}$$

Visa dina uträkningar.

[1p]

- (b) (i) Ange summan

$$S = 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + \dots + 2001$$

m.h.a. summatecken.

- (ii) Beräkna summan S .

[1p]

- (c) Den rekursiva talföljden $\{a_n\}_0^\infty$ definieras genom

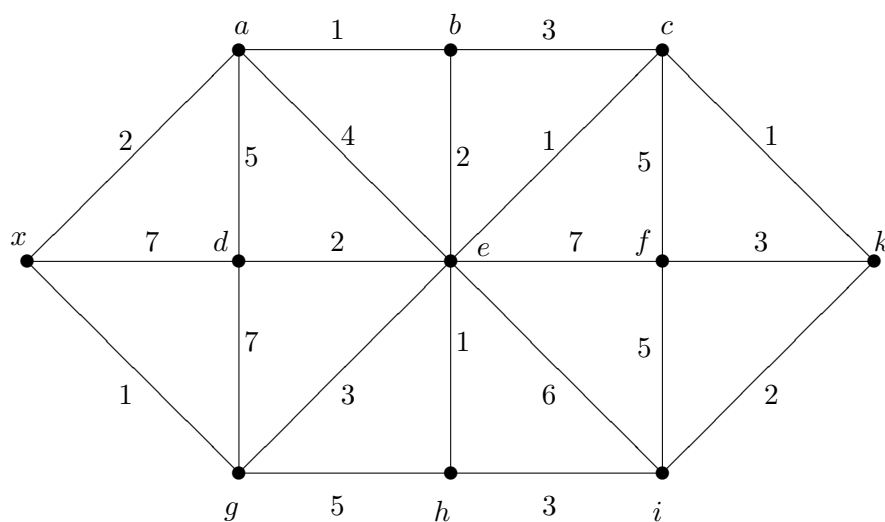
$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{(1-2n)(3-2n)} \quad \text{för } n \geq 0. \end{cases}$$

Beräkna a_2, a_3, a_4, a_5 och a_6 . Visa dina uträkningar.

[1p]

Uppgift 4 (obligatorisk)

- (a) Beskriv *Kruskals Algorithm* för att hitta ett minsta uppspannande träd i en viktad graf.
- (b) Använd Kruskals algoritmen för att hitta ett minsta uppspannande träd i den viktade grafen nedan.
- (c) Ange vikten på det minsta uppspannande träd som du har hittat.



Uppgift 5 (obligatorisk)

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

- (i) reflexiv;
- (ii) symmetrisk;
- (iii) transitiv;
- (iv) antisymmetrisk;
- (v) en ekvivalensrelation;
- (vi) en partialordning.

[1p]

(b) Definiera relationen R på mängden $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ genom att

$$(a, b) \in R \text{ om } ab > 0$$

- (i) Rita relationsgraf för R .
- (ii) Visa att relationen R inte är en partialordning.
- (iii) Är relationen R en ekvivalensrelation? Motivera!

[2p]

Uppgift 6 (obligatorisk)

(a) Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, och låt $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ vara funktionen

$$f(x) = 5x - 3.$$

- (i) Ange *definitionsområdet*, *målmängden* och *värdomängden* till f .
- (ii) Förklara varför f inte är surjektiv. Ge ett specifikt motexempel.
- (iii) Förklara varför f är *injektiv*.

[2]

(b) Låt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen

$$g(x) = x^2 - 1.$$

- (i) Rita grafen för g .
- (ii) Är g *injektiv*? Motivera!

[1]

Uppgift 7 (obligatorisk)

(a) Ange en sanningstabell som visar att $(\neg p) \vee (\neg q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$. [1p]

(b) Låt p och q vara följande två påståenden om positiva heltal n .

$$p : n > 10 \qquad q : n \geq 10.$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska.

(i) $p \rightarrow q$;

(ii) $q \rightarrow p$.

Motivera dina svar! [1p]

(c) Låt r , s och t vara följande tre påståenden om positiva heltal x , y och z .

$$r : x < 10 \qquad s : y \leq 5 \qquad t : 2z > 10$$

Ange om påståendet

$$(\neg r) \vee (s \wedge t)$$

är sant för följande värden av x , y och z :

(i) $x = 10, y = 10$ och $z = 10$;

(ii) $x = 5, y = 5$ och $z = 5$.

Motivera dina svar! [1p]

Uppgift 8 (obligatorisk)

(a) (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod{13}$.

(ii) Ange kongruensklassen $[2]_{13}$ m.h.a. mängdbyggaren.

(iii) Beräkna $[5]_{13} \odot [7]_{13}$ i $\mathbb{Z}_{13}$. [1p]

(b) Hitta största gemensamma delaren av 72 och 114 med Euklides algoritm. [0.5p]

(c) Använd Euklides algoritm för att hitta heltal s och t sådana att

$$72s + 114t = \text{sgd}(72, 114).$$

[0.5p]

(d) Bestäm alla heltalslösningar till kongruensen

$$72x \equiv 2 \pmod{114}.$$

Visa dina uträkningar.

[0.5p]

(e) Bestäm alla heltalslösningar till kongruensen

$$72x \equiv 6 \pmod{114}.$$

Visa dina uträkningar.

[0.5p]

Uppgift 9 (FRIVILLIG)

Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Rita G .
- (b) Definiera vad som menas med att en graf är ett *träd*.
- (c) Definiera vad som menas med att två enkla grafer H_1 och H_2 är *isomorfa*.
- (d) Hitta tre icke-isomorfa uppspännande träd i G .
Motivera varför de inte är isomorfa.