

MITTUNIVERSITETET

TFM

Tentamen 2008

MA053G PROVTENTA

Diskret Matematik för Yrkehögskoleutbildning

Skrivtid: 5 timmar

Datum: Maj 2008

Den obligatoriska delen av denna tenta omfattar 8 frågor, där varje fråga kan ge 3 poäng. Delfrågornas poäng står angivna i marginalen inom []-parenteser. Maximalt poängantal är 24. Därutöver innehåller skrivningen en frivillig uppgift.

Den obligatoriska delen kan maximalt ge betyget B. Tillsammans med betyget B på den obligatoriska delen kan lösningen på den frivilliga uppgiften ge kursbetyget A. En god behandling av den frivilliga uppgiften kan även lyfta kursbetyget ett steg från ett skrivningsbetyg C, D eller E på den obligatoriska delen.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge poängavdrag även om slutresultatet är rätt!

Behandla högst en uppgift på varje papper!

Hjälpmedel: Medföljande formelblad, skriv- och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

LYCKA TILL!!

Kontrollera att du skriver rätt Diskret Matematik A tenta!!

Den här tentan gäller kursen med

[Eriksson & Gavel]

som kursbok.

Uppgift 1 (obligatorisk)

- (a) Låt A, B och C vara delmängder av grundmängden $\mathcal{U}$.
- (i) Rita ett Venndiagram som visar att mängderna A, B och C delar upp $\mathcal{U}$ i 8 disjunkta områden.
 - (ii) Markera området $X = A \cap (B^c \cup C)$ i ditt Venndiagram.
 - (iii) Sätt $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, c, e, f, h\}$, $B = \{a, d, g, h\}$ och $C = \{a, b, c, d\}$. Bestäm mängden X . [1.5p]
- (b) Ange följande mängder genom att lista elementen.
- (i) $\{7r + 2 : r \in \mathbb{Z} \text{ och } -2 \leq r \leq 3\}$;
 - (ii) $\{5^s : s \in \mathbb{Z} \text{ och } -2 \leq s \leq 3\}$. [1p]
- (c) Ange mängden
- $$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right\}$$
- med hjälp av mängdbyggaren. [0.5p]

Uppgift 2 (obligatorisk)

- (a) Uttryck det binära talet $(1011100011001010)_2$
- (i) i basen 10;
 - (ii) som ett hexadecimalt tal. [1p]
- (b) Lös andragradsekvationen $5x^2 + 2x - 3 = 0$. Visa dina uträkningar. [1p]
- (c) Förenkla uttrycket
- $$\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$$
- så långt som möjligt. Visa dina uträkningar. [1p]

Uppgift 3 (obligatorisk)

(a) Ange följande formel m.h.a. summatecken:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[1p]

(b) Beräkna följande summa m.h.a. formeln i (a):

$$\sum_{n=1}^{200} (2n-1)(2n+1).$$

[1p]

(c) Den rekursiva talföljden $\{a_n\}_1^\infty$ definieras genom

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= 2a_n + n \quad \text{för } n \geq 1. \end{cases}$$

Beräkna a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 och a_7 . Visa dina uträkningar.

[1p]

Uppgift 4 (obligatorisk)

(a) Ange en sanningstabell för $p \Rightarrow q$. [0.5p]

(b) Låt p och q vara följande två påståenden om positiva heltal n .

$$p : n < 10 \qquad q : \text{sgd}(n, 10) < 10.$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska. Ge ett motexempel om ett påstående är falskt.

(i) $p \Rightarrow q$;

(ii) $q \Rightarrow p$. [1p]

(c) Ange om följande påståenden är sanna eller falska.

(i) För alla positiva heltal a, b och n gäller att om $n|ab$ så $n|a$ eller $n|b$;

(ii) För alla mängder A och B gäller att om $C = A \cup B$ så är $|C| = |A| + |B|$;

(iii) För alla mängder A och B gäller att
om $|A| = 10$ och $|B| = 3$ så är $|A \times B| = 30$;

(iv) För alla mängder A gäller att $\emptyset \subset A$;

(v) För alla mängder A gäller att $\emptyset \subseteq A$;

(vi) Det finns en mängd A så att $\emptyset \in A$. [1.5p]

Uppgift 5 (obligatorisk)

(a) Förklara vad som menas med att en relation R på en mängd S är

- (i) reflexiv;
- (ii) symmetrisk;
- (iii) transitiv;
- (iv) antisymmetrisk.

[0.5p]

(b) Låt R vara följande relation på mängden $S = \{w, x, y, z\}$.

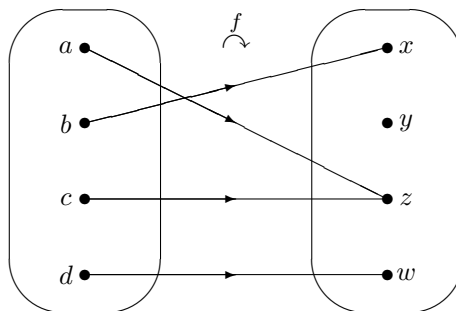
$$R = \{(w, w), (w, y), (x, w), (x, x), (y, w), (y, z), (z, w)\}$$

- (i) Rita relationsgraf för R .
- (ii) Relationen R är inte symmetrisk. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli symmetrisk.
- (iii) Relationen R är inte reflexiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli reflexiv.
- (iv) Relationen R är inte transitiv. Ange den minsta mängden av par som måste läggas till R för att R skall bli transitiv.
- (v) Är relationen R antisymmetrisk? Motivera ditt svar!

[2.5p]

Uppgift 6 (obligatorisk)

- (a) En funktion f representeras av diagrammet nedan.



- (i) Ange *definitionsområdet*, *målmängden* och *värdeområdet* till f .
(ii) Förklara varför f inte är vare sig *injektiv* eller *surjektiv*. Ge ett specifikt motexempel i varje fall. [2]
- (b) Låt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen

$$g(x) = 5x - 3.$$

- (i) Förklara varför g är inverterbar.
(ii) Bestäm g 's invers. [1]

Uppgift 7 (obligatorisk)

Låt G vara grafen med hörnmängd $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och grannmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och låt H vara grafen med hörnmängd $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ och kantmängd

$$E(H) = \{ab, ac, bc, cd, ce\}.$$

- (a) Rita G och H .
- (b) Definiera vad som menas med att en graf är *bipartit*.
- (c) Är G bipartit? Motivera ditt svar.
- (d) Definiera vad som menas med att två grafer är *isomorfa*.
- (e) Är G och H isomorfa? Motivera ditt svar. [3]

Uppgift 8 (obligatorisk)

- (a)
 - (i) Definiera vad som menas med att $a \equiv b \pmod{7}$.
 - (ii) Ange de 7 kongruensklasserna för kongruensrelationen $a \equiv b \pmod{7}$ på $\mathbb{Z}$.
 - (iii) Ange multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_7$. [1.5p]
- (b) Använd Euklides algoritm för att visa att det finns heltal s och t sådana att

$$8s + 13t = 2.$$

[1p]

- (c) Bestäm alla heltalslösningar x till kongruensen

$$8x \equiv 2 \pmod{13}.$$

Visa dina uträkningar. [0.5p]

Uppgift 9 (FRIVILLIG)

- Beskriv *Kruskals Algoritm* för att hitta ett minsta uppspannande träd i en viktad graf.
- Använd din beskrivning ur (i) för att med Kruskals algoritm hitta ett minsta uppspannande träd i den viktade grafen nedan.
- Ange vikten på det minsta uppspannande träd som du har hittat.

