

MA055G

Introduktionskurs i matematik

För att få bonuspoängen måste du lämna in dina lösningar senast
tisdagen den 21 oktober kl. 12:00

Uppgift 1

(a) Ange följande formler utan summatecken:

(i) $\sum_{r=1}^n 1 = n;$

(ii) $\sum_{r=1}^n 2^{2r-1} = \frac{2^{2n+1} - 2}{3}.$

(b) Ange följande formler m.h.a. summatecken:

(i) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$

(ii) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(c) Beräkna följande summor m.h.a. formlerna i (a) och (b).

(i) $\sum_{r=1}^{50} 4r;$

(ii) $\sum_{r=1}^{50} (2r-1)^2;$

(iii) $\sum_{r=1}^n 2^{2r}, \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}_+.$

Uppgift 2

Bevisa m.h.a. induktion att $\sum_{r=1}^n 2^{2r-1} = \frac{2^{2n+1} - 2}{3}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+.$

Uppgift 3

Låt

$$f(x) = |x - 3| + 2.$$

(a) Ange funktionens största möjliga definitionsmängd D_f och värdemängd V_f och skissera funktionens graf.

(b) Visa att $f : D_f \rightarrow V_f$ inte är inverterbar.

Uppgift 4

(a) Beräkna gränsvärdena

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x^3 - 4x^2 - x + 4}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x \right)$

(b) Använd instängningssatsen (Sandwich Theorem) för att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^3 \sin(x) \cos(x)}{(x-1)^5}$$

Uppgift 5

(a) Definiera när funktionen f sägs vara kontinuerlig i punkten $x = a$, med hjälp av gränsvärden och förklara m.h.a. definitionen varför funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

inte är kontinuerlig i $x = 1$.

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$