

Uppgift 1 För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller $|2x - 4| = 4$?

Uppgift 2 Låt

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k}.$$

- (a) Visa att S_n är en geometrisk summa.
- (b) Med hjälp av deluppgift (a) beräkna S_n .

Uppgift 3 Lös ekvationen $e^{2x} + 2e^x = 3$.

Uppgift 4 Derivera funktionen $f(x) = \cos(x^2) \sin(3x^2 - 5x + 2)$.

Uppgift 5 För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\frac{1}{x} < 2x - 1?$$

Uppgift 6 Lös ekvationen $\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Uppgift 7

- (a) Skriv de komplexa talen

$$\frac{-25}{4 - 3i} \quad \text{och} \quad \frac{31 - 17i}{4 - 3i}$$

på rektangulär form (dvs $x + yi$ där x och y är reella tal).

- (b) Låt $z = a + bi$ vara ett komplext tal, där a och b är reella tal. Skriv talen z^2 och $|z^2|$ på rektangulär form.
- (c) Lös ekvationen $(4 - 3i)z^2 - 25z + 31 - 17i = 0$, där $z \in \mathbb{C}$.

Uppgift 8

- (a) Ange definitionen av ett *polynom* med komplexa koefficienter.
- (b) Ange definitionen av *nollställe* till ett polynom.
- (c) Antag att p är ett polynom med reella koefficienter av grad $k \geq 1$. Visa att om z_0 är ett nollställe till p , då är även $\bar{z}_0$ ett nollställe till p .

Uppgift 9

 Bestäm reella talet a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{om } x \neq 1; \\ a & \text{om } x = 1. \end{cases}$$

är kontinuerlig i $x = 1$.

Uppgift 10

 Lös ekvationen $3 - \sqrt{x - 1} = \sqrt{4x + 5}$.

Uppgift 11

 Betrakt komplexa talet

$$u = \frac{z + \bar{w}}{\bar{z} - w},$$

där $w = 2 + 2i$ och $z = 1 - i$.

- (a) Skriv u på rektangulär form.
- (b) Beräkna $|u|$ och $\arg(u)$ och skriv u på polär form.
- (c) Skriv u på formen $u = re^{i\theta}$ och beräkna u^{2008} .

Uppgift 12

 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 8}{x - 2}.$$

Uppgift 13

 För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller att $x + |x - 3| \geq |x - 1| + 2$?

Uppgift 14 Lös ekvationen $z^3 = 4(1 - i\sqrt{3})$, där $z \in \mathbb{C}$.

Uppgift 15 Låt $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\} \cup \{0, 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4\}$. Bestäm mängderna

- (a) $A \cup B \cup C$
- (b) $A \cap B \cap C$
- (c) $(A \cup B) \cap C$

Uppgift 16 Låt p vara ett polynom av grad 6, med heltalskoefficienter. Polynomet p ska också ha egenskapen att $p(-1 + i) = 0$ och $p(-1) = 0$.

- (a) Ge ett konkret exempel på ett polynom som uppfyller ovanstående egenskaper. Polynomet ska vara given på formen

$$p(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

Glöm inte att motivera väl varför just det polynomet du har valt uppfyller ovanstående egenskaper.

- (b) Lös ekvationen

$$\frac{p(x)}{x^2 + (2 - i)x + 1 - i} = 0,$$

där $p(x)$ är ditt konkreta exempel i (a).

Uppgift 17 Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{(2x - 1)^4}$.

Uppgift 18 För vilka x gäller att $x - |x - 3| \leq |x + 1| + 2$?

Uppgift 19 Lös ekvationen $\ln(3) + \ln(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}) = 2\ln(x)$.

Uppgift 20 Lös ekvationen $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$.

Uppgift 21 Låt a och b vara reella tal och låt $f(x) = ae^{x^2-bx-1}$ vara en funktion definierad för alla reella tal.

- (a) Bestäm a och b så att $f(-1) = 2$ och $f(1) = 2$.
- (b) Beräkna $f(4)$ och $f(7 \ln(2))$ exakt.

Uppgift 22 Beräkna summan $\sum_{r=3}^{345} 2$.

Uppgift 23

- (a) Gäller följande likhet

$$\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} = |z|$$

för något av de komplexa talen $z = -1 + i$ eller $z = i$?

- (b) För vilka komplexa tal z gäller den givna likheten?

Uppgift 24 Använd instängningssatsen för att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Uppgift 25 Låt p vara ett polynom med nollställena -1 , $1+i\sqrt{3}$ och $-1+i\sqrt{2}$.

- (a) Bestäm p om man vet att p ska ha så lågt gradtal som möjligt och att p ska ha reella koefficienter.
- (b) Bestäm p om man vet att p ska ha så lågt gradtal som möjligt och att p ska ha komplexa koefficienter.

Uppgift 26 Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1024x)^2}{x^3 + 2}$.

Uppgift 27 Låt $f : [-4, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen

$$f(x) = x^2 + 6x + 5.$$

- (a) Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 6x + 5$.
- (b) Rita grafen till f .
- (c) Ange värdemängden till f .

Uppgift 28 Lös ekvationen $\sqrt{3x-2} - \sqrt{8-2x} = \sqrt{2-x}$.

Uppgift 29

- (a) Definiera vad som menas med ett *komplex tal* och definiera vad som menas med *konjugatet* av ett komplext tal.
- (b) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Beräkna $z\bar{z}$ och $|z|^2$. Vad kan du dra för slutsatser av dina beräkningar?
- (c) Låt w vara ett komplext tal sådant att $w \neq i$. Beräkna

$$\left| \frac{1+iw}{w-i} \right|.$$

Uppgift 30 Lös ekvationen $\ln(x) + \ln(x^2) + \ln(x^3) + \ln(x^4) + \ln(x^5) = 5$.

Uppgift 31 Lös ekvationen $\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$;

Uppgift 32

- (a) Ange definitionen av ett *polynom* med heltalskoefficienter och ange definitionen av ett *nollställe* till ett polynom.
- (b) Låt

$$p(x) = x^6 - x^5 - ax^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x + 2.$$

Bestäm a så att $x = i$ är ett nollställe till p . Lös sedan ekvationen $p(x) = 0$ fullständigt, där $x \in \mathbb{C}$.

Uppgift 33 Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen

$$f(x) = x^3.$$

- (a) Förklara varför f är inverterbar.
- (b) Bestäm f 's invers.

Uppgift 34 Bestäm reella talet a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{om } x \neq 5; \\ 2a + 7 & \text{om } x = 5. \end{cases}$$

är kontinuerlig i $x = 5$. Motivera ditt svar!

Uppgift 35

- (a) För vilka x är $|x + \frac{1}{2}| > |1 - \frac{1}{2}x|$?
- (b) För vilka reella tal a gäller $|-a| = a$?

Uppgift 36 Lös ekvationen $\tan(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Uppgift 37 Låt

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ och } g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Bestäm f , g , och $g \circ f$'s största möjliga definitionsmängd. Beräkna sedan $g \circ f$.

Uppgift 38 Lös ekvationen $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.

Uppgift 39 Partialbråksuppdelning

$$\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

Uppgift 40

- (a) Definiera vad som menas med ett *komplext tal* och definiera vad som menas med *konjugatet* av ett komplext tal.
- (b) Bestäm om möjligt talet a sådant att uttrycket

$$z^2 + (1 - ai)z - 8 + i$$

blir jämnt delbart med $z + i$.

Uppgift 41

- (a) Ange definitionen av ett *polynom* med reella koefficienter och definitionen av *gradtalet* av ett polynom.
- (b) Låt $z = a + ib$ och $w = c + id$ vara två komplexa tal. Beräkna $\overline{zw}$, $\bar{z}\bar{w}$, $\overline{z+w}$ och $\bar{z} + \bar{w}$. Vad kan du dra för slutsatser av dina beräkningar?
- (c) Låt p vara ett polynom med reella koefficienter och gradtal större än eller lika med 1 och låt z vara ett komplext tal. Beräkna $\overline{p(z)}$ (konjugatet av $p(z)$) och $p(\bar{z})$.
- (d) Om z är ett komplext tal sådant att $p(z) = 0$, vad kan du då dra för slutsatser om $p(\bar{z})$ genom att använda ditt samband mellan $\overline{p(z)}$ och $p(\bar{z})$ från (c)?

Uppgift 42 Derivera funktionen $f(x) = x^3 \cos(\sqrt{x})$.

Uppgift 43 Betrakt funktionen

$$f(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}.$$

- (a) Bestäm största möjliga definitions mängd D till f .
- (b) Förklara varför $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ är inverterbar.
- (c) Bestäm f :s invers och ange inversens definitions mängd och värdemängd.

Uppgift 44 Lös ekvationen $\sin^2(x) + \sin(x) = 0$.

Uppgift 45 Lös ekvationen $\cos(2x) + \cos(x) = -1$.

Uppgift 46

- (a) Låt A, B vara två delmängder av $\mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att $f : A \rightarrow B$ är en funktion.
- (b) Låt $A \subseteq \mathbb{R}$ vara en icke-tom mängd och $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. Kom ihåg att vi säger att h är injektiv om $h(x_1) = h(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$, medför att $x_1 = x_2$. Titta nu på följande två funktioner:

$$f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \quad \text{och} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2.$$

Är någon av f, g injektiv? Motivera ditt svar.

Uppgift 47

- (a) Definiera begreppet funktion.
- (b) Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en regel som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } x \geq -1 \\ -x & \text{om } x \leq 3. \end{cases}$$

Är f en funktion?

- (c) Låt $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara två regler som ges av

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Vilken är $(f \circ g)$'s största möjliga definitionsmängd? Bestäm $(f \circ g)$.

Uppgift 48

Betrakta funktionen

$$f(x) = e^{3x-5} + \ln(2x+3).$$

- (a) Ange största möjliga definitionsmängd till f .
- (b) Derivera f .

Uppgift 49 Derivera funktionen $f(x) = 6x^5 + \tan(x^3)$.

Uppgift 50

(a) Ange definitionen av ett polynom med reella koefficienter.

(b) Utför polynomdivisionen

$$\frac{x^3 + x + 1}{x - 1}.$$

(c) Bestäm om möjligt a så att polynomet

$$p(x) = x^3 + ax + 1$$

blir jämt delbart med $x + 1$.

Uppgift 51

(a) Med hjälp av formeln

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

beräkna $\cos(\frac{\pi}{12})$.

(b) Bestäm $\tan(\alpha)$ i intervallet $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ om vi vet att

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{3}.$$

(c) Med hjälp av formeln

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

visa att

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Uppgift 52 Partialbråksuppdelning

$$\frac{2}{x^2 - 1}.$$

Uppgift 53 Låt $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion definierad genom $F(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Bestäm a och b så att $(F \circ F)(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Uppgift 54

(a) Ange följande formler m.h.a. summatecken:

$$(i) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$(ii) \quad 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Beräkna följande summor m.h.a. formlerna i (a).

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{40} (9 - 6n);$$

$$(ii) \quad \sum_{n=10}^{50} (n - 3)^2;$$

Uppgift 55 Derivera funktionen $f(x) = \sin(\sqrt{2x+1})$.