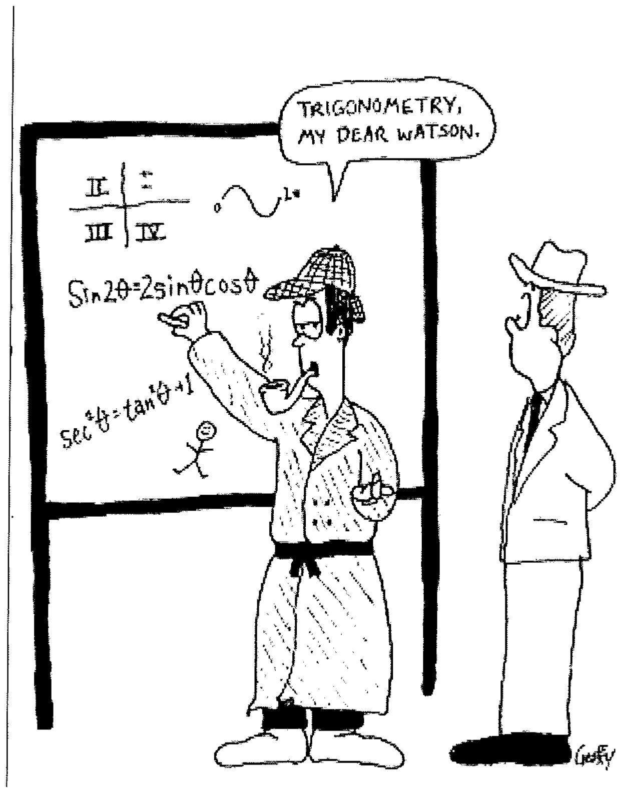
Matematik introduktionskurs

2011-03-01

- Trigonometriska formler och ekvationer



Trigonometriska formler

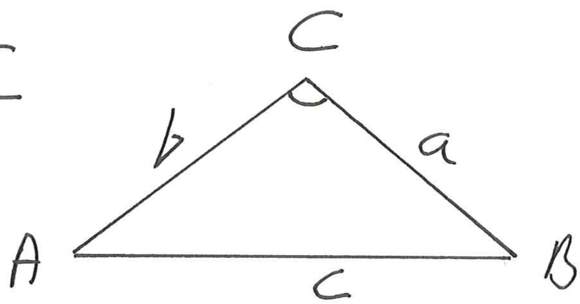
I kap. 2.6 i [RS] använder man sig diverse trigonometriska formler och ofta stöder man sig på en lista med ännu fler formler som finns i Appendix A.

Vi ska här ta fram några av de viktigaste.

Sats 1. [Cosinussatsen]

För sidor och vinklar i en triangel gäller

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Man kan även skriva:

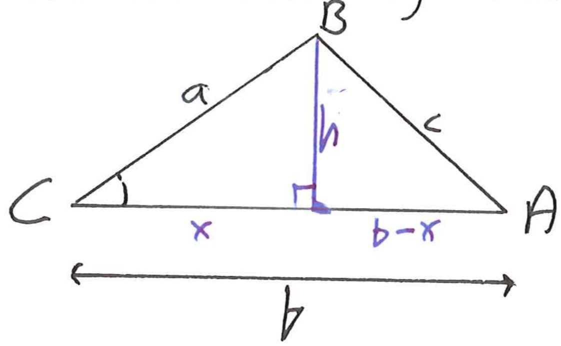
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Bevis skiss

bevis skiss.

Man får två fall: 1) Vinkeln C spetsig



(h^2 mha Pythagoras sats på två sätt)

$$\begin{cases} h^2 = a^2 - x^2 \\ h^2 = c^2 - (b-x)^2 \end{cases}$$

Vi får

$$c^2 - (b-x)^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \qquad (*)$$

Vad är x?

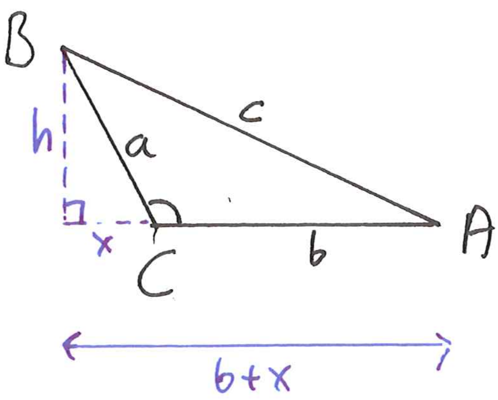
$$\cos C = \frac{x}{a}$$

$$a \cdot \cos C = x$$

ins. i $(*)$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

På liknande sätt kan man visa: 2) C trubbig.



$$\begin{cases} h^2 = a^2 - x^2 \\ h^2 = c^2 - (b+x)^2 \end{cases}$$

o.s.v.

$\square$

Sats 2. [Additionssatsen för sin och cos]

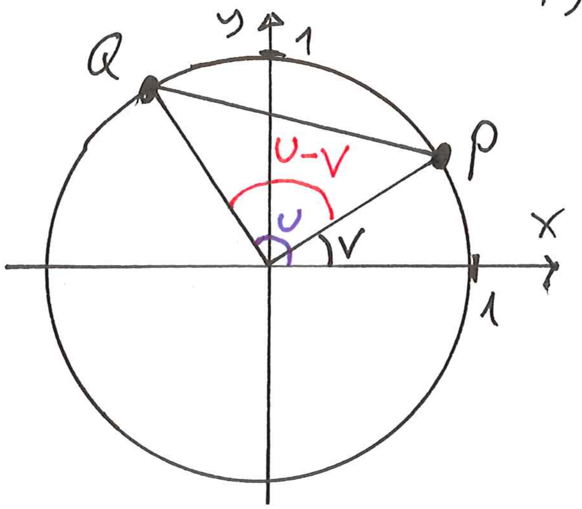
1). $\sin(u+v) = \sin u \cdot \sin v + \cos u \cdot \sin v$

2) $\sin(u-v) = \sin u \sin v - \cos u \cos v$

3) $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

4) $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Vi härleder 4). $\cos(u-v)$.



$P = (\cos v, \sin v)$

$Q = (\cos u, \sin u)$

Vi formulerar avståndet PQ i kvadrat på två sätt.

$$\begin{cases} PQ^2 = (\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 \\ PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u-v) \end{cases}$$

och kan skriva

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = 2 - 2\cos(u-v)$$

vi utvecklar mha kvadreringsregeln

$$\cos^2 u - 2\cos u \cos v + \cos^2 v + \sin^2 u - 2\sin u \sin v + \sin^2 v =$$
$$= 2 - 2\cos(u-v)$$

Trigettan ger

$$2 - 2\cos u \cos v - 2\sin u \sin v = 2 - 2\cos(u-v)$$
$$2\cos(u-v) = 2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Mha denna kan man sedan visa de andra, man behöver bara några små hjälpresultat.

Kom ihåg: • $\cos(-v) = \cos v$ och • $\sin(-v) = -\sin v$

Vi visar 3)

$$\cos(u+v) = \cos(u-(-v)) =$$
$$= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) =$$
$$= \cos u \cos v - \sin u \sin v.$$

När man ska visa 1) eller 2) kan man få användning för:

- $\sin w = \cos(90^\circ - w)$
- $\cos w = \sin(90^\circ - w)$

ex. 1. Bestäm $\cos 15^\circ$ exakt.

Vi vet vad $\cos 45^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 30^\circ$ är.

$$\therefore \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,2} + \frac{1}{\sqrt{2}\,2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}\,2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}\sqrt{2}\,2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Formler för dubbla vinkeln

- $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$
- $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$

Mha trigettan kan man även skriva

$$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1$$

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v$$

Formlerna för dubbla vinkeln kan man visa mha additionssatsen ⑦

t.ex.

$$\cos 2v = \cos(v+v) = \cos v \cos v - \sin v \sin v =$$
$$= \cos^2 v - \sin^2 v$$

Dessa formler används bland annat för att visa nya formler (identiteter) och att skriva om uttryck, t.ex. en ekvation så att vi kan lösa den.

<u>ex.2.</u> Visa att $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$.

<u>Tompas tips</u>

- Utveckla det mest komplicerade ledet
- Ofta är det bra att skriva om $\tan x$ mha definitionen.
- Ofta har man användn. av trigettan
- (Andra använd bara "vapen" är dubbla vinkeln och konjugatregeln)

$$VL: \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$VL = HL$

V.S.V

Ekvationer som omformas med formler

ex.3. Lös ekvationen $\sin 2x = \cos x$, i radianer.

$$\sin 2x - \cos x = 0$$
$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

Vi har en "nollprodukt" som ger två ekv.

Antingen

$$\cos x = 0$$

[$x = \frac{\pi}{2}$ är en lösning]

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

eller

$$2\sin x - 1 = 0$$
$$2\sin x = 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

[$x = \frac{\pi}{6}$ är en lösning]

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Svar: $x = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

Trig ekv. mha andragradare

ex.3. Lös ekv. $\cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2} = 0.$ (*)

"Andragradsekv. i cos".

Vi substituerar, låt $t = \cos x$

då

$$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0.$$

$$t = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}$$

$$t = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$\therefore$ $t_1 = 1$

så $\cos x = 1$

($x = 0^\circ$ är en lösning)

$$x = \pm 0^\circ + n \cdot 360^\circ$$

dvs

$$x = n \cdot 360^\circ$$

$t_2 = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$

($x = 60^\circ$ är en lösning)

$$x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Ibland måste flera formler användas innan man får ekvationen på önskad form.

<u>ex.4.</u> Lös ekv. $\cos 2x + \sin x = 0$.

$\cos 2x + \sin x = 0$ (dubbla vinkeln)

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$ (trig-ettan för att få alla variabel termer i sin)

$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$

Låt $t = \sin x$

då $t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$

o.s.v...

Svar: $x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x = -30^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x = 210^\circ + n \cdot 360^\circ$