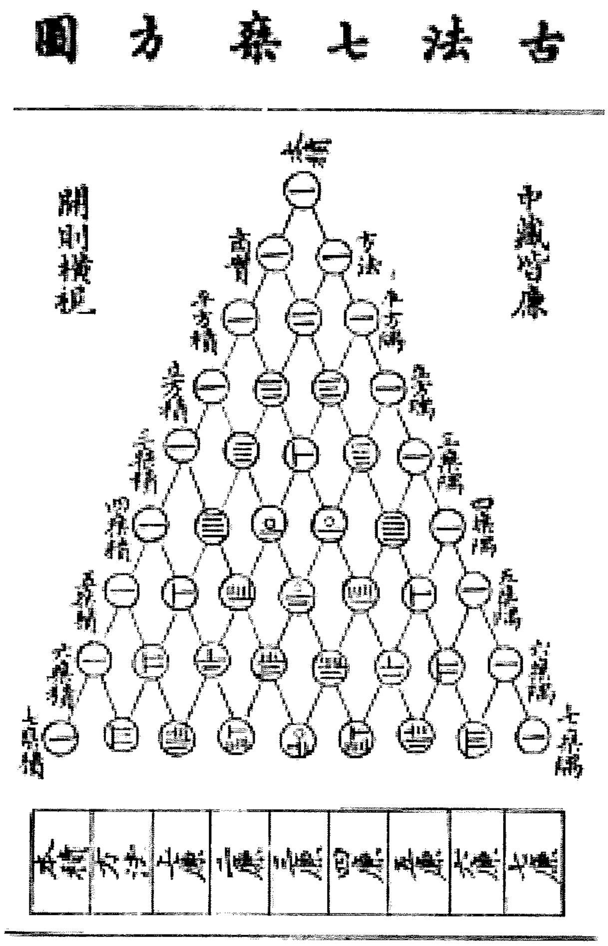
Matematik breddning-introduktionskurs

2012-01-18

- Kombinatorik



Målet för idag är att lära oss lite om kombinatorik så att vi sen kan svara på frågor som:

Hur många pokerhänder finns det?

Dvs, på hur många sätt kan man välja ut 5 element från en mängd med 52 element.

Detta ska vi sedan använda för att bevisa "binomialsatsen". Den talar om hur vi kan utveckla

$$(x+y)^n$$

där n är ett positivt heltal.
Vi kan ju redan kvadreringsregeln, dvs

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

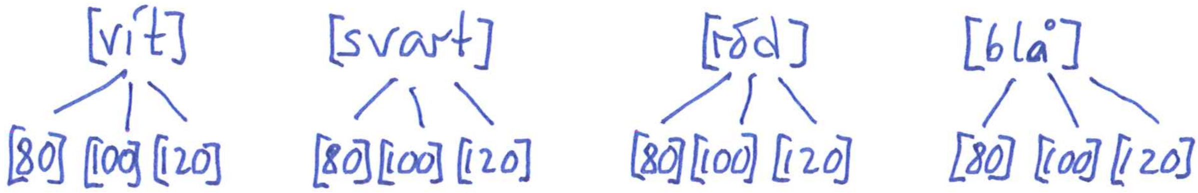
På vägen kan det hända att vi använder begrepp som element mängd och delmängd på ett intuitivt sätt.
Dessa ska vi behandla mer noggrant i nästa vecka.

Kombinatorik

Inom (enumerativ) kombinatorik börjar ofta problemställningarna:

På hur många sätt kan man ... ?

[ex.1] En bilmodell kan väljas i 4 olika färger och 3 olika motorstyrkor. Hur många variationer blir det totalt?



Vi inser att det blir $4 \cdot 3 = \underline{12 \text{ st.}}$

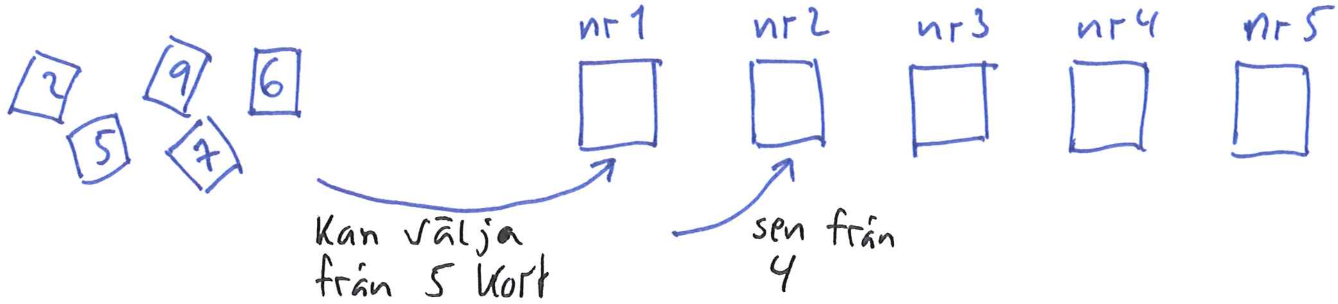
[Multiplikationsprincipen]

Antalet sätt att utföra k operationer där operation j kan utföras på n_j sätt ges av:

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

$\square$

[ex. 2.] Antag att man har 5 olika spelkort. På hur många sätt kan dessa ordnas?



Multiplikationsprincipen ger att de kan ordnas på

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{120 \text{ olika sätt}}$$

[Definition 1.] För varje positivt heltal n definierar vi talet n-fakultet som skrivs $n!$ genom:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Vidare definierar vi

$$0! = 1$$

[ex. 3.]

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{6}$$

$$4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = \underline{24}$$

$$\frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = \underline{90}$$

Ibland vill vi veta på hur många sätt man kan välja ut några ordnade element ur en större mängd. T.ex. de som tar placeringarna 1, 2 och 3 i ett travlopp med 12 hästar.

$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1.320$

[Def. 2.] En permutation av k element ur en mängd M med n element, är ett sätt att med hänsyn till ordningen välja k element ur M.
För antalet sådana permutationer inför vi skrivsättet $P(n,k)$. $(0 \leq k \leq n)$

[Sats. 1.] $$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bevis: Multiplikationsprincipen ger

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\square$

[Anm. 1.] Hästarna ovan var lätta att räkna ut,
$P(12,3) = 1.320$
men $P(n,k)$ ger oss ett allmänt skrivsätt, något vi kan räkna med.

[Obs. 1.] $P(n,n) = n!$ $P(n,1) = n$ $P(n,0) = 1$

[ex. 4] I en förening med 10 medlemmar ska det väljas ordförande, sekreterare och kassör. På hur många olika sätt kan detta göras?

3 ordnade ska väljas från en mängd av 10. Det sökta talet är $P(10,3)$.

Sats 1. ger:

$$P(10,3) = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = \underline{720}$$

Ofta vill man välja ut några element men är inte intresserad av ordningen. T.ex. en pokerhand.

[Def. 3.] En kombination om k element ur en mängd M med n element är ett sätt att utan hänsyn till ordningen välja k element ur M.

För antalet sådana kombinationer inför vi två skrivsätt

$$C(n,k) \quad \text{och} \quad \binom{n}{k}$$

Dessa tal kallas även binomialtal.

[ex.5.] Bestäm $C(3,2)$.

Vi ansätter en mängd M med 3 element och listar sedan alla möjliga val av 2 element ur denna.

$$M = \{a, b, c\}$$

$\{a, b\}$; $\{a, c\}$; b, c

så $C(3,2) = 3$

[Sats 2.] För binomialtalen gäller

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Bevis: Att välja ut k ordnade element ur en mängd med n element (dvs permutation), är samma sak som att först välja k oordnade och sedan ordna dem.

Multiplikationsprincipen ger då

$$P(n,k) = C(n,k) \cdot k!$$

så

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} \overset{(\text{sats }1.)}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

□

[ex.6.] I en förening med 10 medlemmar ska det väljas en interimstyrelse, (som sedan ska konstituera sig själv). På hur många sätt kan interimstyrelsen väljas?

Jo, $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6 \cdot 7!} = \underline{120}$

[ex.7.] På hur många sätt kan man välja två kort (oordnat) från en kortlek om 52 kort?

Jo, $\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{51 \cdot 52}{2} = \underline{1.326}$

Binomialtalen har många trevliga egenskaper. Följande sats ger att vi kan beräkna dem rekursivt (dvs, de följer ur varandra), vilket gör livet lite enklare för oss.

Sats. 3. För binomialtalen med $1 \le k \le n$ gäller:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (*)$$

Bevis: (Man kan visa detta mha Sats. 2. men vi ska ge smakprov på hur bevisresonemang kan se ut i kombinatorik.)

$k=1$

Låt M vara en mängd med n element.

Om $k=1$ så har vi:

VL av $(*)$ $\binom{n}{1} = n$ och HL $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} = 1 + n - 1 = n$

så då stämmer $(*)$

$k>1$

Antag nu att $k>1$ och bilda de $\binom{n}{k}$ delmängderna som har k element ur M.

Fixera ett element x i M och antag att u av k-delmängderna innehåller x och att v av dem inte innehåller x.

forts.

Vi har då

$$\binom{n}{k} = u + v \qquad (**)$$

ex. $n=4$, $k=2$ $\qquad M = \{x, a, b, c\}$

$$\underbrace{\{x,a\};\ \{x,b\};\ \{x,c\}}_{u=3} \qquad \underbrace{\{a,b\};\ \{a,c\};\ \{b,c\}}_{v=3}$$

Låt nu S vara mängden med $n-1$ element som man får då man tar bort x från M.
De v delmängderna som inte innehöll x är då oförändrade.
De u delmängder som innehöll x har nu blivit mindre men de är fortfarande lika många.

ex.

$$S = \{a, b, c\}$$

$$\underbrace{\{a\};\ \{b\};\ \{c\}}_{u} \qquad \underbrace{\{a,b\};\ \{a,c\};\ \{b,c\}}_{v}$$

Så om vi nu betraktar det som att vi väljer från mängden S, så har vi:

$$U = \binom{n-1}{k-1} \qquad V = \binom{n-1}{k}$$

och (**) ger oss resultatet

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$\square$

(i vårt ex. $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$)

Sats.3. ger att vi kan konstruera det som kallas "Pascals triangel" (1600-talet) men som var känd i Indien, Persien och Kina redan 500 år tidigare.

Pascals triangel

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

t.ex.

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=\binom{3}{1}$$

o.s.v

Genom att beräkna de översta kan vi sedan enkelt skriva ut

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

k=0, 1, 2, 3, 4

[ex.8.] Vi kan här t.ex avläsa att

$$\binom{5}{3}=10$$