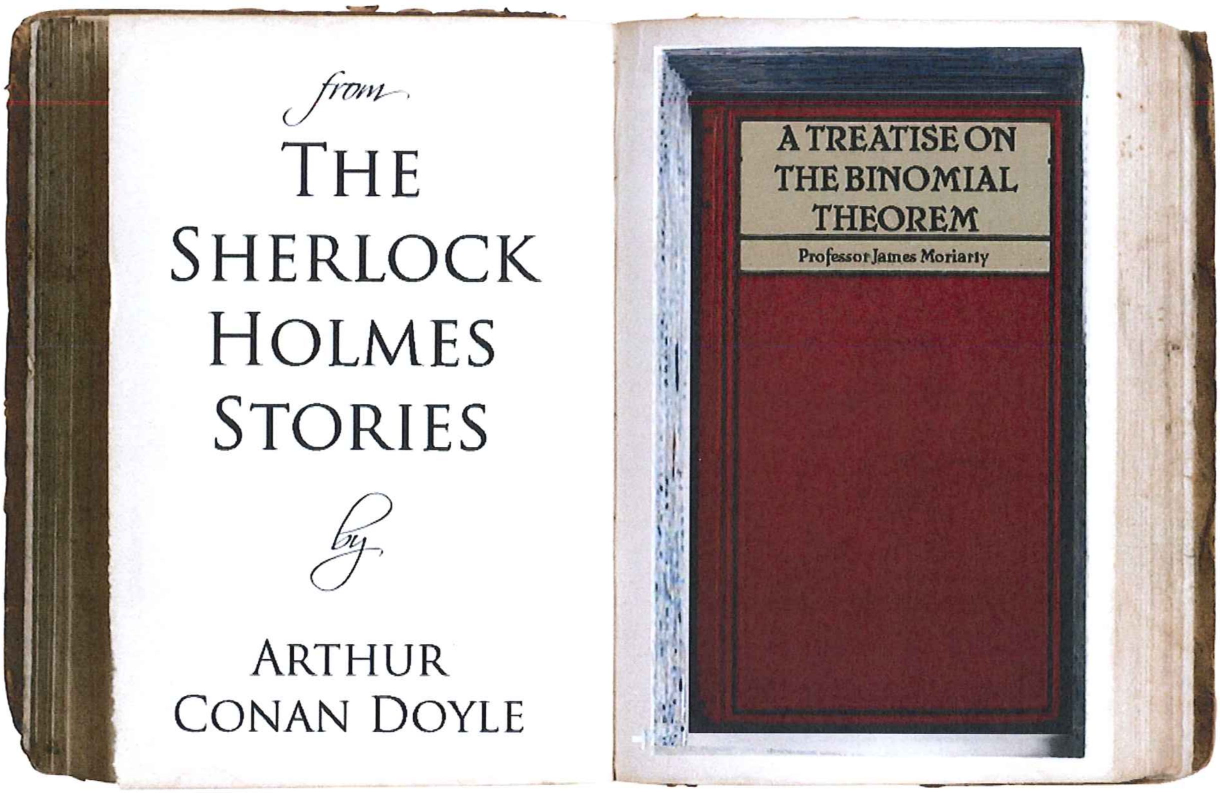
Matematik breddning-introduktionskurs

2012-01-25

- Binomialsatsen
- Mängdlära I



Binomialsatsen

Vårt mål är att kunna utveckla

$$(x+y)^n$$

där n är ett positivt heltal.

Då n=2 har vi kvadreringsregeln:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

Då n=3 kan man utnyttja kvadreringsregeln för att multiplicera två parenteser som sedan multipliceras med den tredje.

$$(x+y)^3 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Här har vi ordnat termerna så att x får fallande grad och y får stigande grad.

Vi observerar att varje term är av grad 3 och att varje möjlig summa 3 av x och y's grader finns med.

Detta beror på att varje möjlig produkt med en term ur en parentes finns med

$$(x+y)(x+y).$$

Låt oss märka "parentestillhörighet" för x och y i föregående exempel.

$$(x+y)^3 = (x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3) =$$

$$= (x_1+y_1)(x_2x_3 + x_2y_3 + y_2x_3 + y_2y_3) =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_1y_2y_3 +$$
$$+ y_1x_2x_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3 + y_1y_2y_3$$

Obs.1. a) $(x+y)^n$ består av termer där summan av graderna för x och y är konstant n.

b) Varje sådan möjlig summa n av gradtalen $0, 1, 2, \ldots n$ finns med.

c) Vi kan skriva dessa termer $a_k x^{n-k} y^k$ för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, där koefficienten a_k anger hur många $x^{n-k}y^k$ det finns för varje fixt k.

d) Talen a talar om på hur många sätt man kan välja k parenteser varur man hämtar y.

ex. 1.

$$(x+y)^3 = a_0 x^{3-0} y^0 + a_1 x^{3-1} y^1 + a_2 x^{3-2} y^2 + a_3 x^{3-3} y^3$$

$$= 1 \cdot x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 1 \cdot y^3$$

[Binomialsatsen]

Låt x och y vara reella tal och låt n vara ett positivt heltal, då

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

Bevis: Från Obs. 1. vet vi att $(x+y)^n$ består av alla termer

$$a_k x^{n-k} y^k \qquad \text{där } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vi vet också att koefficienten a_k anger på hur många sätt man kan välja ut k parenteser av n

$$\therefore \quad a_k = \binom{n}{k}$$

$\square$

Anm. 1. För $(x-y)^n$ gäller att man får minustecken för termer med udda k.

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}y^n$$

Anm. 2. Senare i kursen kommer vi att se på summanotation och kan då skriva:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

---

ex. 2. Binomialutveckla $(x+y)^4$.

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 =$$

$$= \underline{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}$$

ex.3. Binomialutveckla $(2x+y^2)^3$.

$$(2x+y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2y^2 + \binom{3}{2}(2x)(y^2)^2 + \binom{3}{3}(y^2)^3 =$$

$$= 1\cdot 8x^3 + 3\cdot 4x^2y^2 + 3\cdot 2x\cdot y^4 + 1\cdot y^6 =$$

$$= \underline{8x^3 + 12x^2y^2 + 6xy^4 + y^6}$$

---

ex.4. Beräkna $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$.

[Tips: Beräkna $(1+1)^n$]

---

ex.5. Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av $\left(y+\frac{2}{y^2}\right)^6$.

[Tips: Betrakta termen $\binom{6}{k}y^{6-k}\left(\frac{2}{y^2}\right)^k$ där graden för y är 0]

$$\binom{6}{k}y^{6-k}\left(\frac{2}{y^2}\right)^k = \binom{6}{k}y^{6-k}\cdot 2^k\left(y^{-2}\right)^k = 2^k\binom{6}{k}y^{6-k}y^{-2k} =$$

$$= 2k\binom{6}{k}y^{6-3k} \quad (*)$$

Sätter $6-3k=0$

$6=3k$

$k=2$

och insättning i $(*)$ ger

$$2\cdot 2\binom{6}{2}y^0 = 4\cdot\frac{6!}{2!\,4!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2} = \underline{60}$$

Mängder I

Mängdläran som introducerades av G. Cantor 1874 är en av matematikens grundstenar.

Def.1. En mängd är en samling objekt som kallas element i mängden.

Ett sätt att beskriva en (ändlig) mängd är att räkna upp alla element som ingår i den.

ex.6.

$$A = \{1, 5, 2\}$$

Elementen är "individer" och ordningen har ingen betydelse, så

$$\{1, 5, 2\} = \{1, 2, 2, 5, 5\} = \{1, 2, 5\}$$

Två mängder är lika om de innehåller precis samma element.

Om elementet 2 finns i A så skriver vi $2 \in A$ (tillhör A, ligger i A)

Om 2 inte ligger i A så skriver vi $2 \notin A$.

Anm.3. Låt x vara ett element och M en mängd. Då gäller antingen

$$x \in M \quad \text{eller} \quad x \notin M$$

Mängden som inte innehåller något element kallas tomma mängden och betecknas $\emptyset$.

Kardinalitet

(finns inte i [K])

En mängd A:s kardinalitet är ett mått på dess storlek. Den betecknas $|A|$ och talar om "hur många" element det finns i mängden.

ex.7. Ange kardinaliteten för

$A = \{a, b, c\}$ $\quad |A| =$

$B = \{1, 2, \{3, 7\}, \{1, 2\}\}$

För ändliga mänder som dessa kan vi göra en lista över elementen som tar slut.

Heltalen är en oändlig mängd som vi kan lista, men listan tar aldrig slut. Mängden av heltal sägs vara uppräknelig

De reella talen kan man inte lista, så den talmängden sägs vara överuppräknelig.

Några vanliga talmängder

Naturliga talen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Heltalen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Reella talen $\mathbb{R}$

Mängdbeskrivning mha egenskap

$M = \{x : \text{egenskap för } x\}$

sådana att

ex. 8.

$J = \{y : y = 2x, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ "rationella talen"

ex. 9. Skriv mängden $A = \{3, 6, 9, 12\}$ mha mängdbyggare.

$A =$

ex. 10. Skriv $B = \{5, 8, 11, 14\}$ mha mängdbyggare.

ett sätt är $B = \{y : y = 3x + 2, x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 4\}$

ex. 11. Bestäm mängden $A = \{x : x^2 + x - 6 = 0\}$.

"lösningsmängd"

Delmängder

Def. 2. Om alla element i A också är element i B, så säger vi att A är en delmängd till B.
Vi skriver $A \subseteq B$.

ex. 12. Låt $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b, f\}$
och $C = \{a, b, c, d\}$.
Då har vi att
$$A \subseteq C$$
men $B \not\subseteq C$

Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ säger vi att A är en äkta delmängd till B och skriver $A \subset B$.

För ändliga mängder har vi att $A \subset B$ ger att $|A| < |B|$.

ex. 13
$$\{5, 7\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

//