Matematik breddning-introduktionskurs

2012-02-01

- Mängder II
- Något om tal

Att räkna med mängder ([K]: 1.3-1.5)

Vi ska se på några operationer (räknesätt) man använder på mängder.

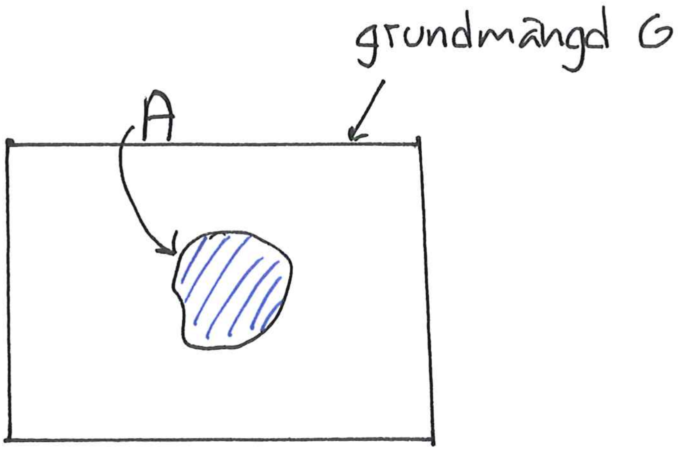
Def. 1. Låt A och B vara mängder

union $A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$

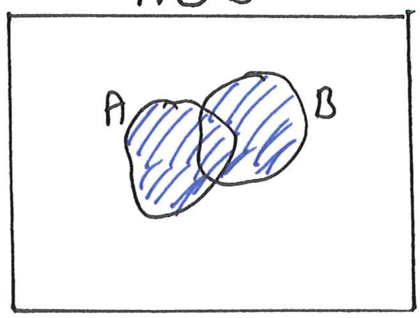
snitt $A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$

mängdminus $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ och } x \notin B\}$

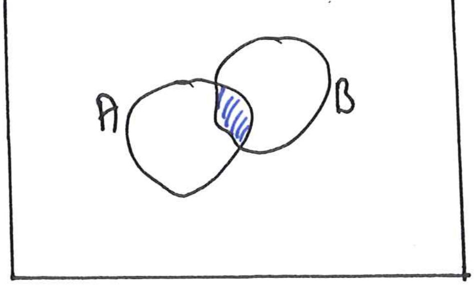
Venn-diagram



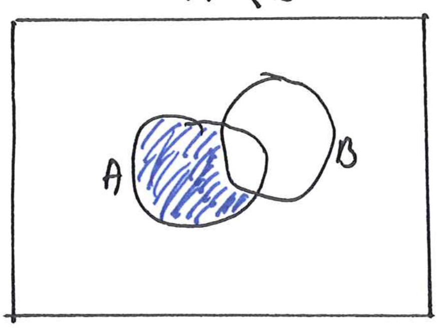
$A \cup B$



$A \cap B$

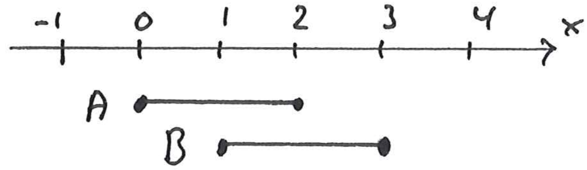


$A \setminus B$



ex. 1. Låt $A = \{x : x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le 2\}$

$B = \{x : x \in \mathbb{R},\ 1 \le x \le 3\}$



Vad blir?

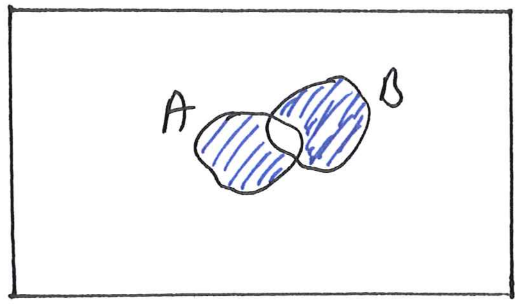
a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B \setminus A$

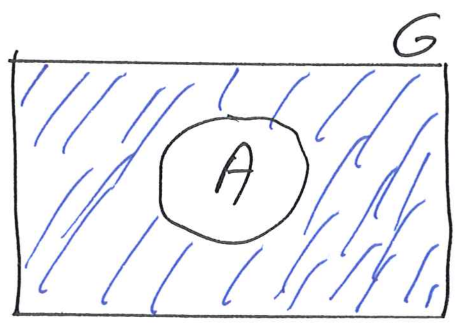
De tre ovanstående operationerna är mycket vanliga. Ibland ser man också den <u>symmetriska differensen</u> $A \triangle B$.

$A \triangle B = \{x : x \in A \cup B \text{ och } x \notin A \cap B\}$



Man ser också på <u>Komplementet till A</u> som skrivs A^C

$A^C = G \setminus A$



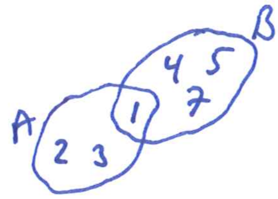
ex. 2. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 4, 5, 7\}$

i en grundmängd $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bestäm

a) $(A \cup B)^c$

b) $A \triangle B$



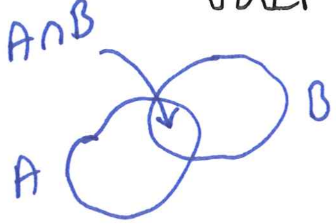
Def. 2. Två mängder A och B sägs vara <u>disjunkta</u> om de inte har några gemensamma element, dvs om $A \cap B = \emptyset$.

---

ex. 3. Antag att $A = 14$ $B = 9$

och $|A \cap B| = 7$.

Vad blir då $|A \cup B|$?



Potensmängd

Def. 3. Låt A vara en mängd.
Då kallas mängden av alla delmängder till A för **potensmängden** till A, den skrivs $P(A)$.

ex. 4. Låt $A = \{a, b, c\}$, då

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\, b\, c\}\}.$$

(obs att $\emptyset$ och A är delmängder till A)

ex. 5. Låt A vara en mängd och antag att $|A| = n$. Bestäm $|P(A)|$.

---

extra: Antag att vi ska välja ut en grupp människor ifrån en folksamling om n personer. Hur stor ska folksamlingen vara för att dess potensmängd ska ha en kardinalitet som är lika med antalet atomer i universum, som beräknas till 10^{80}.

Några samband och räknelagar

I [K] 1.5 finns en sats om några räknelagar som gäller för mängdoperationer. Du behöver inte memorera dem.

Ur satsen:

1. Union resp. snitt är <u>associativa</u> operationer.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

jmf. addition: $(1+2)+3 = 1+(2+3)$

2. Union resp. snitt är <u>kommutativa</u> op.

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

jmf. mult: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

3. <u>Distributiva</u> lagen gäller för union & snitt.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

jmf. med mult & add $\quad 2(3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

Ang. talsystemet

Vi har nämnt talmängder som $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$. Exempel på snabbnotation för delmängder av dessa är

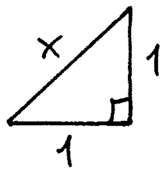
$$\mathbb{Z}_+ = \{x : x \in \mathbb{Z},\ x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x : x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$$

Idag ska vi se på irrationella tal, dvs talmängden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Om existensen av irrationella tal

Finns behov av att veta



Pythagoras sats ger att $x = \sqrt{2}$

Proposition 1 (Tillskrivs Hippasos ca: 500 f.kr)
$\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal.

För att bevisa den behöver vi två "hjälpsatser" ifrån talteorin.

Lemma 1. Låt $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$.
Då är primtalsfaktoriseringen av a entydig.

Lemma. 2. Låt $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ och låt p vara ett primtal.
Om p är en faktor i a^2 så är p även en faktor i a.

Bevis av Proposition. 1. (ex. på motsägelsebevis)

Antag att $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$
där $m, n \in \mathbb{Z}_+$ och antag vidare att $\frac{m}{n}$ är förkortat så långt som möjligt, dvs m och n har inga gemensamma faktorer, då

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2 \qquad (*)$$

Så 2 är en faktor i m^2 (av Lemma 1.).
Eftersom 2 är ett primtal ger då Lemma 2. att 2 även är en faktor i m.

Vi kan skriva $m = 2k$ (för något $k \in \mathbb{Z}_+$)
och sätter in $2k$ istället för m i $(*)$.

Insättning i (*) ger

$$2n^2 = (2k)^2$$
$$2n^2 = 4k^2$$
$$n^2 = 2k^2$$

så 2 är en faktor i n^2 och Lemma.2. ger då att 2 även är en faktor i n.

Detta skulle betyda att både m och n har faktorn 2 vilket motsäger vårt antagande.

$\therefore$ Antagandet var falskt, så $\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal. $\square$

Anm.1. Även om $|\mathbb{Q}|$ är oändlig så ligger "nästan alla" tal i $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Några exempel är π och e.

På liknande sätt kan man visa vad som påstås i exempel 1.2 i [R.S]

"En kvadratrot ur ett positivt heltal är antingen ett heltal eller ett irrationellt tal".

$$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{48} \notin \mathbb{Z} \quad \text{så} \quad \sqrt{48} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Något om decimalutvecklingar

Anm. 2. Decimalutvecklingen hos rationella tal är ändlig eller oändlig och periodisk.

Decialutvecklincen hos irrationella tal är oändlig och operiodisk.

ex. 6.

$$\frac{3}{11} = 0,272727\ldots = 0,\overline{27}$$

$$\pi = 3,1415\ldots\ldots$$

---

ex. 7. Visa att $0,9999\ldots = 1$

ex. 8. Skriv $0,\overline{12}$ som ett bråktal.

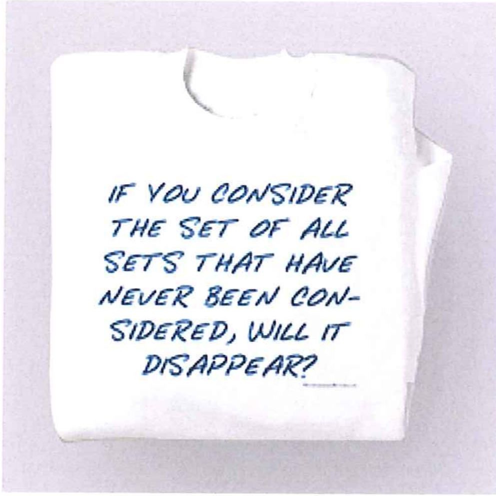
$$x = 0,121212\ldots$$

$$100x = 12,121212\ldots$$

$$99x = 12$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

//


IF YOU CONSIDER
THE SET OF ALL
SETS THAT HAVE
NEVER BEEN CON-
SIDERED, WILL IT
DISAPPEAR?