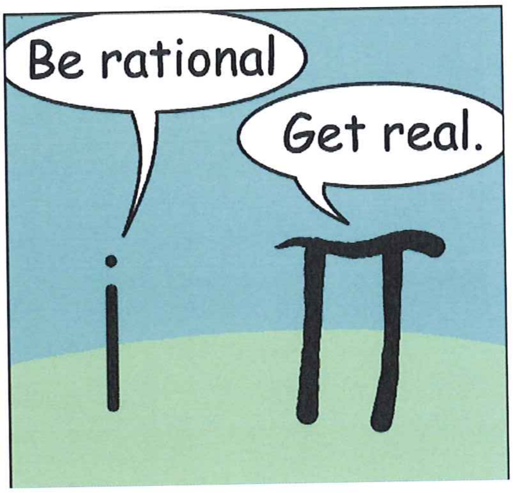
Matematik breddning-introduktionskurs

2012-03-14

- Partialbråksuppdelning
- Om talsystemet
- Peanos axiom



Partialbråksuppdelning

Ofta förenklar vi en summa av rationella uttryck genom att skriva den som ett uttryck.

ex. 1.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} + \frac{3x}{x(x-1)} = \frac{5x-2}{x(x-1)}$$

När vi partialbråksuppdelar gör vi det omvända. Ett rationellt uttryck med flera faktorer i nämnaren skrivs som en summa av flera enklare uttryck.

---

ex. 2. Partialbråksuppdela $\frac{3x+2}{x(x+2)}$ (*)

Vi ansätter

$$\frac{3x+2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

där de olika faktorerna i (*)'s nämnare blir egna nämnare, och respektive täljare, dvs A och B är av en grad lägre än sin nämnare.

forts. →

forts. ③

$$\frac{3x+2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)}{x(x+2)} + \frac{Bx}{x(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A}{x(x+2}$$

Sedan jämför vi täljarnas koefficienter vilket ger oss följande ekvationssystem

$$\begin{cases} A + B = 3 & (1) \\ 2A = 2 & (2) \end{cases} \Rightarrow A = 1$$

ins. i (1) ger

$$1 + B = 3$$
$$B = 2$$

svar: $\dfrac{3x+2}{x(x+2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+2}$

---

ex. 3. Exempel på tillämpning av partialbråksuppdelning. (Att beräkna integraler ingår inte i kursen).

Beräkna

$$\int_1^2 \frac{3x+2}{x(x+2)}\,dx$$

forts. →

forts. $\int_1^2 \frac{3x+2}{x(x+2)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}\right)dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{2}{x+2}\,dx =$

$= \left[\ln x\right]_1^2 + 2\left[\ln(x+2)\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 + 2(\ln 4 - \ln 3) =$

$= \ln 2 + 2\ln 4 - 2\ln 3 = \ln 2 + \ln 16 - \ln 9 = \underline{\ln 32/9}$

Anm. 1. Varje rationellt uttryck (av polynom) kan skrivas som partialbråk där nämnarna är av högst grad två

---

ex. 4. Partialbråksuppdela $\frac{7x+1}{x^2+2x-3}$. (*)

Vi faktoriserar nämnaren mha dess nollställen.

$$x^2+2x-3=0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2+3} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$$

så $x_1 = -3$ och $x_2 = 1$.

Vi kan skriva (*) som

$$\frac{7x+1}{(x+3)(x-1)}$$

forts. →

Vi ansätter

$$\frac{7x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{B(x+3)}{(x+3)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax - A + Bx + 3B}{(x+3)(x-1)} = \frac{(A+B)x + 3B - A}{(x+3)(x-1)}$$

Jmf. av täljarnas koefficienter ger

$$\begin{cases} A + B = 7 & (1) \\ -A + 3B = 1 & (2) \end{cases}$$

Ledvis addition ger

$$4B = 8$$
$$B = 2$$

ins. i (1) ger

$$A + 2 = 7$$
$$A = 5$$

Svar: $\frac{5}{x+3} + \frac{2}{x-1}$

Anm. 2. Om en av nämnarna i ett partialbråk blir av grad 2 så får man ansätta täljaren som ett förstagradspolynom.

ex.5. Partialbråksuppdela $\dfrac{5x^2-x+2}{x^3+x}$.

Nämnaren kan faktoriseras till $x(x^2+1)$ där faktorn x^2+1 inte kan faktoriseras vidare (irreducibel).

Vi ansätter

$$\frac{5x^2-x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} \quad \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

En jmf. av täljarnas koefficienter ger

$$\begin{cases} A+B = 5 \\ A = 2 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad B=3$$

Svar: $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

Talmängder

Vi är vana vid att röra oss med reella tal, men:

- Medel Svensson har 2,3 barn

- Hon är född 80 02 30

Ofta är det viktigt att veta vilken mängd av tal som är relevant.

Ursprunget är de naturliga talen som man t.ex. använder för att ange antal.

De kan ses som "kardinaltal"

$|\emptyset| = 0$

$|\{a\}| = 1$

$|\{c, g\}| = 2$

De vanliga oändliga talmängderna

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ de naturliga talen

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ heltalen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$ de rationella talen

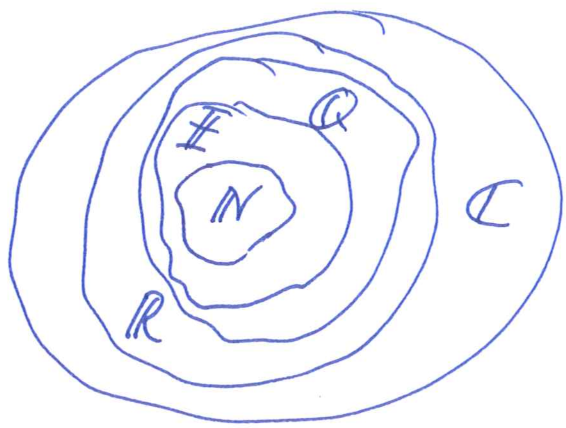
$\mathbb{R} =$ de reella talen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{a : a \in \mathbb{R},\ a \notin \mathbb{Q}\}$ de irrationella talen

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ de komplexa talen

---

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

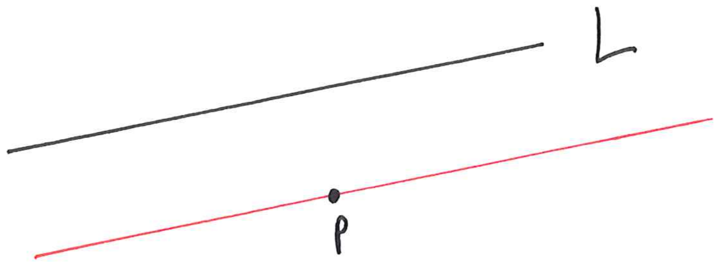


Om matematikens uppbyggnad

I botten ligger definitioner som talar om vad saker är och axiom (postulat) vilka är påståenden som inte bevisas utan vars sanning tas för given.

T.ex. anges Euklidisk geometri (vår vanliga geometri) mha 5 axiom varav det mest kända är parallellaxiomet som kan skrivas på formen

"Givet en rät linje och en punkt utanför linjen så kan man dra en och endast en rät linje som går igenom punkten och är parallell med linjen."



Om hur talen definieras

De naturliga talen med alla dess egenskaper kan fås ur

Peanos axiomsystem

P1) 0 är ett tal

P2) Varje tal x har en efterföljare x'

P3) Två olika tal har aldrig samma efterföljare.

P4) Inget tal har 0 som efterföljare.

P5) (Induktionsaxiomet)

Om p är en egenskap och

1) 0 har egenskapen p samt

2) om x har egenskapen p medför att även x' har egenskapen p

då har alla (dessa) tal egenskapen p.

P5 ska vi ägna oss åt vid nästa campusföreläsning då vi ska lära oss att använda induktionsbevis.

Sedan behöver man införa operationerna addition och multiplikation.

Addition definieras genom:

A1) $x+0=x$

A2 $x+y'=(x+y)'$

Obs att bara detta är givet. T.ex. måste man sedan bevisa att addition är kommutativ, dvs att vi har sådant som $3+5=5+3$.

ex.6. Visa att $0''+0''=0''''$, (dvs att $2+2=4$).

$$0''+0'' \overset{A2}{=} (0''+0')' \overset{A2}{=} ((0''+0)')' \overset{A1}{=}$$
$$= ((0'')')' = (((0')')')' = 0''''$$

Multiplikation definieras genom

M1) $x\cdot 0 = 0$

M2) $x\cdot y' = xy + x$

Sedan kan man bygga upp alla räkneregler och egenskaper som gäller för de naturliga talen, som t.ex. att lösa ekvationer eller att det finns oändligt många primtal.

Heltalen $\mathbb{Z}$ fås genom att utvidga $\mathbb{N}$. T.ex har vi ekvationen

$$a = b + x$$

som inte har lösningar för alla $a, b \in \mathbb{N}$ men paret (a,b) kan då få definiera ett negativt tal och man kan bygga vidare genom att på detta använda sina erhållna räknelagar för $\mathbb{N}$.

På liknande sätt utvidgar man sedan $\mathbb{Z}$ till $\mathbb{Q}$.

För att utvidga $\mathbb{Q}$ till $\mathbb{R}$ finns flera konstruktioner som t.ex. Dedekindsnitt.

Den avgörande egenskapen för $\mathbb{R}$ är att den är "komplett", vilket man kan förstå som att den inte har några hål.