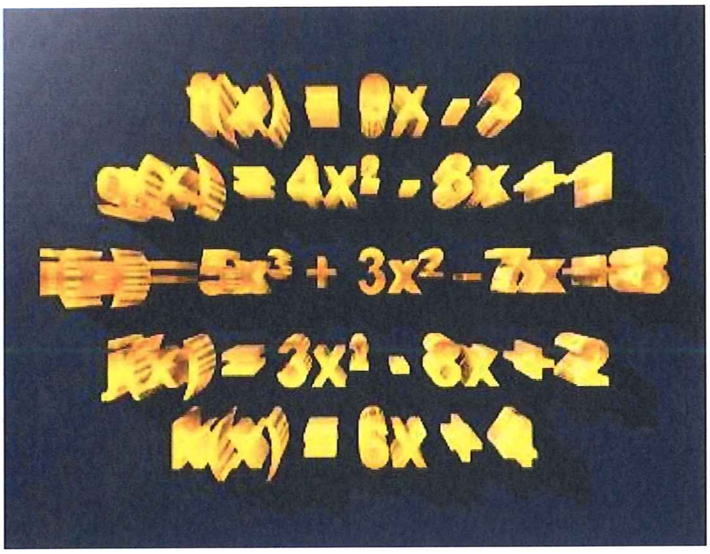
Matematik breddning-introduktionskurs

2012-03-28

- Polynom och algebra



Kom ihåg:

Polynom

Def. 1. Ett reellt polynom $p(x)$ är ett uttryck som kan skrivas

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$$

där $n \in \mathbb{N}$ och koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är reella tal.

Anm. 1. Ibland betraktar vi även polynom över andra talmängder som $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{C}$.

Def. 2. Graden av ett polynom är det största tal n så att $a_n \neq 0$.

Mängden polynom är sluten under addition, subtraktion och multiplikation

Ex. 1. $(x^3 + 1) + (2x^3 + x^2 - x) = 3x^3 + x^2 - x + 1$ (får grad 3)

$(x^5 + 3x^2) + (x - x^5) = 3x^2 + x$ (grad 2)

$(x+1)(x^2 + 2x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (grad 3)

Division av polynom

går inte alltid jämnt upp. Ofta får man lägga till en restterm. Jmf. med heltal:

Ex. 2

$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$ som kan skrivas $25 = 7 \cdot \underset{\text{kvot}}{3} + \underset{\text{rest}}{4}$

[Divisionssatsen för polynom]

Låt $p(x)$ och $g(x)$ vara polynom med grad $p(x) \geq$ grad $g(x)$. Då finns det entydigt bestämda polynom $k(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$p(x) = g(x)\,k(x) + r(x)$$

där $r(x) = 0$, eller grad $r(x) <$ grad $g(x)$.

Ex. 3. Låt $p(x) = x^3 + 4x^2 + 8x - 1$ och $g(x) = x^2 + 1$. Då har man att $k(x) = x + 4$ och $r(x) = 7x - 5$.

rest

$$(x^3 + 4x^2 + 8x - 1) = (x^2+1)(x+4) + (7x - 5)$$

kvot

Polynomdivision

Hur kan vi hitta $k(x)$ och $r(x)$ i ex. 3?

ex. 4. Dividera x^3+4x^2+8x-1 med x^2+1.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 4 \\
\hline
x^2+1 & x^3 + 4x^2 + 8x - 1 \\
 & -(x^3 \qquad + x) \\
\hline
 & \qquad 4x^2 + 7x - 1 \\
 & \qquad -(4x^2 \qquad + 4) \\
\hline
 & \qquad\qquad 7x - 5
\end{array}
$$

så $q(x) = x+4$ och $k(x) = 7x-5$ och

$$x^3+4x^2+8x-1 = (x^2+1)(x+4) + 7x-5$$

Som vi ska se har man ofta användning för detta då man ska lösa polynomekvationer av högre grad.

Samband mellan faktorer och nollställen

Om vi dividerar $p(x)$ med $g(x) = x-a$ så kommer $r(x)$ att vara av grad 1, dvs en konstant.

$$p(x) = (x-a)k(x) + r$$

Detta gäller för alla x så låt oss sätta in $x=a$.

$$p(a) = (a-a)k(a) + r$$

och vi ser att $r = p(a)$

Obs.1. Om a är ett nollställe till polynomet $p(x)$, dvs löser ekv $p(x) = 0$, så är resten 0, och omvänt.

Faktorsatsen

Polynomet $p(x)$ är delbart med $x-a$ om och endast om $p(a) = 0$.

Ex.4. Bestäm a så att $x-3$ är en faktor i $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 12$.

Faktorsatsen ger att isf har vi att $p(3)=0$

Insättning ger $3^3 - 3\cdot 3^2 + a\cdot 3 + 12 = 0$

$$3a = -12$$

$$a = -4$$

Polynomekvationer

Algebrans fundamentalsats: (Gauss 1799)

Varje polynom av grad $n \geq 1$ har minst ett komplext nollställe.

Tillsammans med faktorsatsen ger detta

Följd 1.

Varje polynom av grad $n \geq 1$ har precis n komplexa nollställen om dessa räknas med multiplicitet.

Så vi vet precis hur många rötter vi som mest kan finna.

Ex. 5. Låt $p(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$. Lös ekvationen $p(x) = 0$ genom att först gissa en heltalsrot.

Vi vet att vår heltalsrot delar konstanten -10, så den är ± 1, ± 2 eller ± 5.

Dessa prövar vi genom insättning i $p(x)$.

forts. →

(forts.)

$p(1) = -2 \neq 0$

$p(-1) = -30 \neq 0$

$p(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 13 \cdot 2 - 10 = 0$

Så $x = 2$ är en rot och faktorsatsen ger då att $x - 2$ delar $p(x)$. Vi har

$$p(x) = (x-2)\,k(x)$$

Vi bestämmer $k(x)$ genom polynomdivision.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 5 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 6x^2 + 13x - 10 \\
 & -(x^3 - 2x^2) \\
\hline
 & -4x^2 + 13x \\
 & -(-4x^2 + 8x) \\
\hline
 & 5x - 10 \\
 & 5x - 10 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Så $p(x) = 0$ kan skrivas

$$(x-2)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

Nollprodukt!

och vi löser

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

Svar: $x_1 = 2 \qquad x_2 = 2 + i \qquad x_3 = 2 - i$

Här hade vi en reell rot och ett konjugerande par av komplexa rötter.

<u>Proposition 1.</u> Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter. Om ekvationen $p(x) = 0$ har en icke-reell rot $z = a + bi$, då är även $\bar{z} = a - bi$ en rot.

<u>Varför?</u> Vi använder oss av följande identiteter.

(1) $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$; (2) $\bar{z}^n = \overline{z^n}$; (3) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

Låt $p(x) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x^n$
och antag att $p(z) = 0$

Då får vi

$$
\begin{aligned}
p(\bar{z}) &= a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_n \bar{z}^n = \\
&\overset{(2)}{=} a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_n \overline{z^n} = \\
&= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \cdots + \bar{a}_n \overline{z^n} = \\
&\overset{(1)}{=} \bar{a}_0 + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_n z^n} = \\
&\overset{(3)}{=} \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \\
&= \overline{p(z)} = \bar{0} = 0
\end{aligned}
$$

$\square$

Följd 2.

Varje polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i polynom av högst grad 2

[eftersom

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - \underbrace{2\,\mathrm{Re}\,z}_{\in \mathbb{R}} \cdot x + \underbrace{|z|^2}_{\in \mathbb{R}}$$]

Ex. 6. Låt $p(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$.
Givet att $p(x)$ har ett nollställe $x = i\sqrt{2}$, lös ekvationen $p(x) = 0$ fullständigt.

- Prop. 1. ger att även $x = -i\sqrt{2}$ är en rot.
- Faktorsatsen ger att både $(x - i\sqrt{2})$ och $(x + i\sqrt{2})$ delar $p(x)$.
- Alltså är även produkten av dessa en delare till $p(x)$.

$$(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2}) = x^2 - i^2\sqrt{2}^2 = x^2 + 2$$

forts →

(forts.)

Vi använder polynomdivision för att finna vårt " $k(x)$ " så att vi kan faktorisera $p(x)$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 6 \\ \hline x^2+0x+2 & x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 \\ & -(x^4 + 0 + 2x^2) \\ \hline & -x^3 - 6x^2 - 2x \\ & -(-x^3 + 0 - 2x) \\ \hline & -6x^2 + 0 - 12 \\ & -(-6x^2 + 0 - 12) \\ \hline & 0 \end{array}$$

så $p(x) = 0$ kan skrivas

$$(x^2+2)(x^2-x-6) = 0$$

och $x^2-x-6=0$ ger

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

dvs $x = \frac{6}{2}$ eller $x = -\frac{4}{2}$

Svar: $x_1 = i\sqrt{2}$; $x_2 = -i\sqrt{2}$; $x_3 = 3$; $x_4 = -2$

//