

NÅGRA UPPGIFTER PÅ SUMMOR OCH BEVIS

(1) Skriv följande summor med hjälp av Σ -notation.

a) $2 + 7 + 12 + 17 + 22$

b) $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$

c) $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \dots$

(2) Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar. Beräkna om möjligt deras värden.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^k$

c) $5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \dots = 5 \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^j$

d) $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$

(3) En patient börjar att varje morgon ta medicin i form av en tablett på 5 mg. För varje dygn utsöndrar kroppen 80% av den ursprungliga mängden.

a) Hur stor mängd av medicinen har patienten i blodet efter 4 dagar?

b) Hur stor mängd av medicinen kan räkna med att patienten har i blodet på riktigt lång sikt?

(4) Formulera negationen till påståendet $x + 3y > 5$.

(5) Formulera det kontrapositiva påståendet till: *Det är påsk, då äter vi ägg.*

(6) Avgör och visa om följande påståenden är sanna eller falska.

a) Summan av tre på varandra följande heltal är delbar med 3.

b) Summan av tre på varandra följande heltal är delbar med 6.

c) Produkten av två udda heltal är udda.

(7) Visa med hjälp av ett motsägelsebevis att $\sqrt{5}$ inte är ett rationellt tal. Givet är följande lemma.

Lemma 0.1. *Låt $a, p \in \mathbb{Z}_+$ där p är ett primtal. Om p delar a^2 , då delar p även a .*

Svar

- (1) a) $\sum_{k=0}^4 (2 + 5k)$;
 b) $\sum_{j=0}^4 \left(-\frac{2}{3}\right)^j$;
 c) $\sum_{j=0}^{\infty} (1 + 3j)$.
- (2) a) $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, konvergerar till $\frac{1}{2}$;
 b) $\left|-\frac{5}{4}\right| > 1$, så divergerar;
 c) $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$, konvergerar till 4;
 d) $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, konvergerar till $\frac{4}{3}$. $\left(\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i - \left(\frac{2}{3}\right)^0 - \left(\frac{2}{3}\right)^1\right)$
- (3) a) $5 \sum_{j=0}^4 \left(\frac{1}{5}\right)^j \text{ mg} \approx 6,2 \text{ mg}$;
 b) $5 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^j \text{ mg} = \frac{25}{4} \text{ mg}$.
- (4) $x + 3y \leq 5$.
- (5) *Vi äter inte ägg, så det är inte påsk.*
- (6) a) Sant. Låt x vara det minsta av dessa heltal som bildar summan s , då

$$s = x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3 = 3(x + 1)$$
 som är delbart med 3 eftersom $x + 1$ är ett heltal.
 b) Falskt. Tag summan $2 + 3 + 4 = 9$, men 9 är inte delbar med 6.
 c) Sant. Låt $x = 2k + 1$ och $y = 2m + 1$, där $k, m \in \mathbb{Z}$. Då får vi

$$xy = (2k + 1)(2m + 1) = 2(2km + k + m) + 1$$
 vilket är ett udda tal.
- (7) Se motsvarande bevis av att $\sqrt{2}$ är irrationellt från föreläsningen 100203.