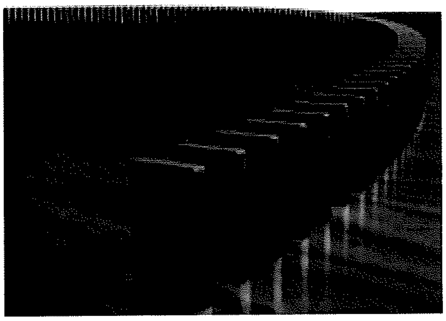
Matematik breddning-introduktionskurs

2012-04-16

- Induktion



Om exempel och bevis

Exempel kan användas för att påvisa existens.

ex.1. Feit-Thompssons hypotes säger att det inte finns några primtal p och q sådana att

$$\frac{p^q - 1}{p-1} \qquad \frac{q^p - 1}{q-1}$$

har gemensam faktor.

t.ex.

$$\frac{2^3-1}{2-1} = 7 \quad \text{och} \quad \frac{3^2-1}{3-1} = 4$$

har ingen gemensam faktor.

Denna hypotes bevisades vara falsk genom motexemplet $p = 17$ $q = 3313$ som ger gemensam faktor 112.643.

Obs! Det finns inget annat motexempel där både p och q är mindre än 400.000.

Man kan gissa en formel för summan av de n första positiva udda heltalen

$n=1$	1	$=1$	verkar vara kvadrater...
$n=2$	$1+3$	$=4$	
$n=3$	$1+3+5$	$=9$	

Vi gissar
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

Just denna kan vi bevisa mha formeln för aritmetisk summa, men i mer allmänna fall behöver vi använda "induktionsbevis". Dessa bygger direkt på Peanos 5:e axiom från konstruktionen av $\mathbb{N}$.

Induktionsaxiomet:

Om P är en egenskap beroende av naturliga tal n och

(1) $P(0)$ är sant, samt

(2) om $P\,m$ sant implicerar att $P(m+1)$ är sant,

då är $P(n)$ sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Tänk dig en oändlig rad av bollar.

- Vi vet: Den första bollen är röd.
- Vet också: Om en boll är röd, då är efterföljaren röd.
- Då vet vi att alla bollar är röda.

"Manual" för induktionsbevis

I: [Startsteg] Visa att $P(k)$ är sant ($k \in \mathbb{N}$)

II: [Induktionssteg]

- Induktionsantagande: Antag att $P(m)$ är sant för något $m \geq k$.
- Visa att detta antagande leder till att $P(m+1)$ är sant.

III: ["Åkallan"] Av induktionsaxiomet följer då att $P(n)$ är sant för alla naturliga tal $n \geq k$.

Ex.2. Visa mha induktionsbevis att
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \text{för alla } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (*)$$

I: (startsteg) $n=1$ ger

$$VL = 2\cdot 1 - 1 = 1$$
$$HL = 1^2 \quad = 1$$

$VL = HL$ så $(*)$ gäller för $n = 1$.

II: (Induktionssteg)
Induktionsantagande: Antag att $(*)$ gäller för $n=m$, $m \geq 1$. Dvs att

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2m-1)}_{a_m} = m^2$$

Vi ska då visa att i så fall gäller $(*)$ även för $n = m+1$, dvs att

$$a_m + (2(m+1) - 1) = (m+1)^2$$

$$VL: \; a_m + 2(m+1) - 1 \overset{\text{enl. ant.}}{=} m^2 + 2m + 2 - 1 = m^2 + 2m + 1$$

$$HL: \; (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$$

så $VL = HL$

III: Av induktionsaxiomet följer då att $(*)$ gäller för alla heltal $n \geq 1$.

$\square$

Ex. 3. Visa att $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. $(*)$

Vi gör induktionsbevis.

I. $n=1$ ger i $(*)$

$$VL: \quad 1^2 = 1$$

$$HL: \quad \frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1) = 1$$

$VL = HL$, så $(*)$ gäller då $n=1$.

II. Antag att $(*)$ gäller för $n=m$, $m \geq 1$, dvs att

$$\underbrace{1^2+2^2+\dots+m^2}_{a_m} = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

Vi ska då visa att i så fall gäller $(*)$ även för $n=m+1$, dvs att

$$\underbrace{1^2+2^2+\dots m^2+(m+1)^2}_{a_{m+1}} = \frac{1}{6}(m+1)(m+1+1)(2(m+1)+1)$$

$$VL: \quad a_{m+1} = a_m + (m+1)^2 \overset{\text{enl. ant.}}{=}$$

$$= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 =$$

forts. →

$$= \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) + \frac{6(m+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)\left(m(2m+1) + 6(m+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6m+6) =$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+7m+6)$$

HL: $\frac{1}{6}(m+1)(m+1+1)(2(m+1)+1) =$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3) =$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+7m+6)$$

$$VL = HL$$

III. Av induktionsaxiomet följer då att $(*)$ gäller för alla heltal $n \geq 1$.

$\square$

Delbarhet

ex. 4. Visa mha induktion att för alla positiva heltal n gäller att $3^{2n}-1$ är delbart med 8.

I. $n=1$ ger $3^{2\cdot 1}-1=8$ som är delbart med 8.

II. Antag att $3^{2m}-1$ där $m \geq 1$, är delbart med 8, dvs att vi kan skriva

$$3^{2m}-1 = 8k \qquad \text{för något } k \in \mathbb{Z}_+$$

Vi ska då visa att i så fall är $3^{2(m+1)}-1$ (*) också delbart med 8.

Vi utvecklar (*)

$$3^{2(m+1)}-1 = 3^{2m+2}-1 = 3^2 \cdot 3^{2m}-1 =$$

$$= 9\cdot 3^{2m} - 9 + 8 = 9(3^{2m}-1)+8 \overset{\text{enl. antagandet}}{=}$$

$$= 9\cdot 8k+8 = 8(9k+1) = 8q \qquad \text{för något } q \in \mathbb{Z}_+$$

III. Av induktionsaxiomet följer då att $3^{2n}-1$ är delbart med 8 för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

$\square$

Olikheter

ex.5. Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{n}{2}$ för $n \geq 5$. (✱)

I. $n=5$ ger

VL: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{60}$

HL: $\frac{5}{2} = \frac{150}{60}$

$\because$ VL < HL så (✱) gäller då $n=5$.

II. Antag att ✱ gäller för $n=m$, där $m \geq 5$, dvs att

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} < \frac{m}{2}$$

Vi ska då visa att isf gäller (✱) för $n=m+1$, dvs att

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1} < \frac{m+1}{2} \quad (✱✱)$$

forts. →

enl. ant.

VL: i (**) $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1} < \frac{m}{2}+\frac{1}{m+1} =$

$$= \frac{m(m+1)}{2(m+1)} + \frac{2}{2(m+1)} = \frac{m^2+m+2}{2(m+1)}$$

HL: i (**) $\frac{m+1}{2} = \frac{(m+1)(m+1)}{2(m+1)} = \frac{m^2+2m+1}{2(m+1)}$

Så vi har att

$$VL < \frac{m^2+m+2}{2(m+1)} = \frac{m^2+m+1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+1)}$$

$$HL = \frac{m^2+2m+1}{2(m+1)} = \frac{m^2+m+1}{2(m+1)} + \frac{m}{2(m+1)}$$

Eftersom $m \geq 5 > 1$ så har vi att $VL < HL$, dvs olikheten gäller då även för $n = m+1$.

III. Av induktionsaxiomet följer då att (*) gäller för alla heltal $n \geq 5$. □

Anm. I olikheter måste man ofta själv hitta på något sätt att jämföra i induktionssteget.

Induktionsbevis används i alla möjliga sammanhang och det är då inte alltid lätt att se om de är korrekta. Se t.ex Pólyas bevis om att "alla hästar har samma färg" som jag kommer att lägga ut separat. //