5. Visa att $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ är delbart med 73 för alla naturliga tal n. $(*)$

I. $n=0$ ger $8^2 + 9^1 = 64 + 9 = 73$

så $(*)$ gäller då $n = 0$.

II. Antag att $(*)$ gäller för $n = m$, $m \geq 0$, dvs att

$$8^{m+2} + 9^{2m+1} = 73k \quad \text{för något } k \in \mathbb{Z}.$$

Vi ska då visa att

$$8^{(m+1)+2} + 9^{2(m+1)+1}$$

är delbart med 73.

$$8^{(m+1)+2} + 9^{2(m+1)+1} = 8^{m+3} + 9^{2m+3} =$$

$$= 8 \cdot 8^{m+2} + 81 \cdot 9^{2m+1} = 8 \cdot 8^{m+2} + 8 \cdot 9^{2m+1} + 73 \cdot 9^{2m+1} =$$

$$= 8\left(8^{m+2} + 9^{2m+1}\right) + 73 \cdot 9^{2m+1} \overset{\text{enl. ant.}}{=} 8 \cdot 73k + 73 \cdot 9^{2m+1} =$$

$$= 73\left(8k + 9^{2m+1}\right)$$ som är delbart med 73.

III. Av induktionsaxiomet följer då att $(*)$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

6. Visa att $2^n > n^2$ för alla naturliga tal $n \geq 5$. $(*)$

I. $n=5$ ger VL: $2^5 = 32$; HL $= 5^2 = 25$
så VL > HL och $(*)$ gäller då $n=5$.

II. Antag att $(*)$ gäller då $n=m$, $m \geq 5$.
Dvs att

$$2^m > m^2$$

Vi ska då visa att $(*)$ gäller för $n=m+1$, dvs

$$2^{m+1} > (m+1)^2$$

Enl. antagandet har vi att

$$2^{m+1} > 2 \cdot m^2$$

Så vi vill visa att $2m^2 > (m+1)^2$ då $m \geq 5$.
Dvs att

$$2m^2 > m^2 + 2m + 1 \qquad \text{för } m \geq 5.$$

$$m^2 > 2m+1 \qquad (**)$$

(Här kan man göra ett nytt induktionsbevis, eller)

$$m^2 - 2m + 1 > 2$$

$$(m-1)^2 > 2$$

$$m-1 \geq \pm 2$$

$$m > (\pm)2 + 1$$

$$m > 3$$

Så $(**)$ är sann för alla $m > 3$.

III Av Induktionsaxiomet följer då att $(*)$ gäller för alla $n \geq 5$.

$\square$