Lösningsförslag till prov 1, MaBredd-introduktionskurs vt. 2010.

1. a) $6! = \underline{720}$ (1p)

b) $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\,4!} = \dfrac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot 7 = \underline{35}$ (1p)

c) $P(5,2) = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = 4\cdot 5 = \underline{20}$ (1p)

2 a) $A \cup C = \underline{\{2, 3, 4, 5, 7\}}$ (1p)

b) $|A \setminus B| = |\{2, 4, 7\}| = \underline{3}$ (1p)

c) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}$ (1p)

−0,5 om man skriver 3, 4, 5 o.s.v.

3a) $|3x-7| = 2 \quad (*)$

$3x-7 \geq 0$
$3x \geq 7$
$x \geq 7/3$

så enl. def. av absolutbelopp har vi två fall

1) [för $x \geq 7/3$]

$3x - 7 = 2$

$3x = 9$

$x = 3$

2) [för $x < 7/3$]

$-(3x-7) = 2$

$7 - 3x = 2$

$5 = 3x$

$x = 5/3$

Lösningarna tillhör sina respektive intervall.

Svar: $x = 3$ eller $x = 5/3$

(1,5p)

b) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x} + 1 = 0 \quad (*)$

$\sqrt{x-9} = \sqrt{x} - 1$

$x - 9 = x - 2\sqrt{x} + 1$

$2\sqrt{x} = 10$

$\sqrt{x} = 5$

$x = 25$

[insättn. $x = 25$ i $*$ ger

VL: $\sqrt{25-9} - \sqrt{25} + 1 = 4 - 5 + 1 = 0 = HL$

så $x = 25$ löser $(*)$]

−0,5p om man inte kollat sin lösning i $(*)$

Svar: $x = 25$

(1,5p)

4a) $|2x-3| > 1 \quad (*)$

$2x-3 \geq 0$

$2x \geq 3$

$x \geq 3/2$

Enl. def. av absolutbelopp får vi två fall

1) $[x \geq 3/2]$

$2x-3 > 1$

$2x > 4$

$x > 2$

2) $[x < 3/2]$

$-(2x-3) > 1$

$3-2x > 1$

$2 > 2x$

$x < 1$

(som båda tillhör sina def. områden)

Svar: $x < 1$ eller $x > 2$

(1,5p)

b) $x+1 \geq \frac{1}{x+1}$

$x+1 - \frac{1}{x+1} \geq 0$

$\frac{(x+1)^2 - 1}{x+1} \geq 0$

$\frac{x^2+2x+1-1}{x+1} \geq 0$

$\frac{x(x+2)}{x+1} \geq 0$

där x byter tecken vid $x=0$
$x+2$ –"– vid $x=-2$
$x+1$ –"– vid $x=-1$

		-2		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$R(x)$	$-$	0	$+$	ej def	$-$	0	$+$

Svar: $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 0$

$-0{,}5$p om man t.ex. skrivit $-2 \leq x \leq -1$ och $x \geq 0$

(1,5p)

5. Element i D_f finns bland lösningarna till $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

dvs $x_1 = 5$ och $x_2 = -2$.

Vidare: $5 \in \mathbb{N}$ men $-2 \notin \mathbb{N}$

så definitionsmängden $D_f = \{5\}$ — 5 är ok.

Värdemängden R_f får vi då genom

$f(5) = 5^2 + 1 = 26$, så $R_f = \{26\}$ — 26 är ok.

(2p)

6.a) $(a+2b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3(2b) + \binom{4}{2}a^2(2b)^2 + \binom{4}{3}a(2b)^3 + \binom{4}{4}(2b)^4 =$

$= a^4 + 4a^3 \cdot 2b + 6a^2 4b^2 + 4a\,8b^3 + 16b^4 =$

Svar? $= a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$ (1,5p)

b) Binomialsatsen ger att vi får termer

$$\binom{8}{k}(2x^3)^k\left(\frac{3}{x}\right)^{8-k} = \binom{8}{k}2^k x^{3k} \cdot 3^{8-k} \cdot x^{k-8} =$$

$$= \binom{8}{k} 2^k \cdot 3^{8-k} \cdot x^{4k-8} \quad (*)$$

Vi får konstant term när $4k - 8 = 0$
$k = 2$

ins $k = 2$ i $(*)$ ger

$$\binom{8}{2} 2^2 3^6 = \frac{8!}{2!6!} \cdot 4 \cdot 729 =$$

$$= \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot 4 \cdot 729 = 28 \cdot 4 \cdot 729 = 81\,648$$

Svar: konstanttermen är 81.648 (1,5p)

7) $x^2 - 2x + 4y^2 + 24y + 33 = 0$

$$x^2 - 2x + 1 + 4(y^2 + 6y + 9) - 4 = 0$$

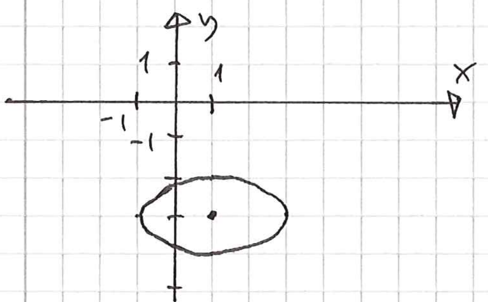
$$(x-1)^2 + 4(y+3)^2 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y+3)^2 = 1$$

Att man lyckats kvadratkomplettera rätt och skriva på adekvat form är värt 1p

dvs $$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+3)^2}{1^2} = 1$$

Vilket är en elips med medelpunkt i $(1,-3)$ som sträcker sig 2 i x-led och 1 i y-led.



(2p)

8) a) $\binom{11}{6} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 462$ (1p)

(# Alla lag) − (# mörkhår lag) − (# sätt att välja lag med 1 rödhårig)

b) $\binom{18}{6} - \binom{11}{6} - 7\cdot\binom{11}{5} = \underline{14.868}$

$$\left(\text{alt. } \binom{11}{4}\cdot\binom{7}{2} + \binom{11}{3}\binom{7}{3} + \binom{11}{2}\binom{7}{4} + \binom{11}{1}\cdot\binom{7}{5} + \binom{11}{0}\binom{7}{6} = \underline{14.868}\right)$$

Svar: Man kan välja lag med minst två rödhåriga på 14.868 sätt. (2p)