MaBredd Prov 2 vt 2010: Lösningsförslag

1.a) $\sum_{k=1}^{4} (2^k - 2k) = \underline{10}$ 1p

b) $\sum_{j=0}^{4} \left(\frac{3}{2}\right)^j = \frac{211}{16}$ 1p

2. $\sum_{k=-3}^{7} k^2$ 1p

3.a) Geom. serie med $\left|-\frac{5312}{5307}\right| > 1$, så divergerar 1p 0,5p utan argument.

b) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{6000}{3^j} = 6000 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$

Geom. serie med $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, så konvergerar 1p

$$6000 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = 6000 \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^j =$$

$$= 6000 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6000 \cdot 3}{2} = \underline{9000}$$ 1p

4. $\dfrac{13x+14}{5x^2+7x} = \dfrac{13x+14}{x(5x+7)}$ (*)

Ansätt (*) $= \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{5x+7} = \dfrac{A(5x+7)+Bx}{x(5x+7)} =$

$= \dfrac{5Ax+Bx+7A}{x(5x+7)} = \dfrac{(5A+B)x+7A}{x(5x+7)}$

så

$\begin{cases} 5A+B = 13 & (1) \\ 7A = 14 & (2) \end{cases}$

(2) ger $A=2$, ins i (1) ger $B=3$

svar: $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{5x+7}$

3p

5. $\sqrt{3x-6} - \sqrt{x-1} = 1$ (*)

$\sqrt{3x-6} = \sqrt{x-1} + 1$

$3x-6 = x-1+2\sqrt{x-1}+1$

$2x-6 = 2\sqrt{x-1}$

$x-3 = \sqrt{x-1}$

$x^2-6x+9 = x-1$

$x^2-7x+10=0$

$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}-\frac{40}{4}} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{10}{2} = 5$; $x_2 = \frac{4}{2} = 2$.

Test i (*)

$[x=5]$ VL: $\sqrt{3\cdot 5-6} - \sqrt{5-1} = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 3-2 = 1 = HL$

$[x=2]$ VL: $\sqrt{3\cdot 2-6} - \sqrt{2-1} = 0-1 = -1 \neq HL$

svar: $x=5$

−1p om man har med falsk rot. (inte kollar)

3p

6. a) $\cos x = 0 \Leftarrow x = \frac{\pi}{2}$ 1p

b) $x = 3 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$ 1p

---

7. Reella koefficienter, så $z = 2i$ är också en rot.

Faktorsatsen ger att $(z-2i)(z+2i) =$
$= z^2 + 4$ delar $z^4 + 3z^3 - 6z^2 + 12z - 40$.

Om man använder 2i så bör man nämna att här är det reella koeff.

Man behöver inte nämna faktorsatsen.

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2 + 3z - 10 \\
\hline
z^2 + 0z + 4 & z^4 + 3z^3 - 6z^2 + 12z - 40 \\
 & -(z^4 + 0z + 4z^2) \\
\hline
 & 3z^3 - 10z^2 + 12z \\
 & -(3z^3 + 0z^2 + 12z) \\
\hline
 & -10z^2 + 0z - 40 \\
 & -(-10z^2 + 0z - 40) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$z^2 + 3z - 10 = 0$$

$$z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$z_3 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \; ; \; z_4 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Svar: $z_1 = -2i$; $z_2 = 2i$; $z_3 = 2$; $z_4 = -5$

3p

8. $z = \sqrt{-7+24i}$

Då $z^2 = -7+24i$

och $|z^2| = \sqrt{(-7)^2+24^2} = \sqrt{625} = 25$

Låt $z = a+bi$

då $z^2 = (a+bi)^2 = a^2+2abi+b^2i^2 = a^2-b^2+2abi$

vidare $|z^2| = |z|^2 = a^2+b^2$

Vi får ekvationssystem (överbestämt)

Denna behövs egentligen inte.

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 25 & (1) \\ a^2-b^2 = -7 & (2) \\ 2ab = 24 & (3) \end{cases}$$

(1) och (2) ger

$$2a^2 = 18$$
$$a^2 = 9$$
$$a = \pm 3$$

ins. i (3) ger

$[a=3]$ $2 \cdot 3 \cdot b = 24$

$b = 4$

$[a=-3]$ $2(-3) \cdot b = 24$

$b = -4$

Svar: $z_1 = 3+4i$; $z_2 = -3-4i$

3p

9. $\sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsbevis.

I. ins $n=0$ i $(*)$

VL: $0^3 = 0$

HL: $\frac{0^2 \cdot 1^2}{4} = 0$

VL = HL så $(*)$ gäller då $n=0$

II. Antag att $(*)$ gäller för något $n = m \geq 0$.

Dvs att $\sum_{j=0}^{m} j^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$

Vi ska då visa att

$$\sum_{j=0}^{m+1} j^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} \quad (**)$$

Vi utv. VL i $(**)$

$$\sum_{j=0}^{m+1} j^3 = \sum_{j=0}^{m} j^3 + (m+1)^3 \overset{\text{enl.ant.}}{=\!=} \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 =$$

$$= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4} = \frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{4} =$$

$$\overset{\text{kvad. regl.}}{=} \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = HL$$

III. Av induktionsaxiomet följer att $(*)$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

$-1p$ om man inte åberopar induktionsaxiomet.

3p